Exercice 11.1. Montrer que $\mathrm{ch}(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Exercice 11.2. Montrer que $\mathrm{ch}(K_{3,3}) \geq 3$ en trouvant une fonction f des sommets de $\mathrm{ch}(K_{3,3})$ dans les parties de $\mathbb{N}$ à deux éléments et en prouvant que $K_{3,3}$ n'admet pas de coloriage admissible par rapport à cette fonction.

Exercice 11.3. Soit G un graphe 2-connexe, c'est-à-dire que G est connexe et que si on enlève n'importe quelle arête de G, le graphe résultant est encore connexe. Montrer que pour tout couple de sommets v_1, v_2 de G, il existe un cycle qui passe par v_1 et v_2. (Indice : on pourra raisonner par récurrence sur la distance entre v_1 et v_2).

Exercice 11.4. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de nombres réels.

1. En partant de l'inégalité $\sum_i \sum_j (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0$ montrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\left(\sum_i x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_i y_i^2\right)$$

2. En déduire

$$\sum x_i^2 \geq \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\ .$$

3. Montrer qu'il y a égalité en (2) ssi tous les x_i sont égaux.