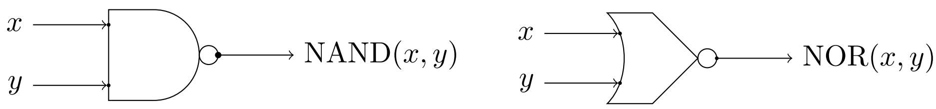
Exercice 3.1. Quelles sont les distributions de valeurs des variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ qui rendent les formules suivantes vraies :

1. $F = (x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (x_2 \Rightarrow x_3) \wedge \cdots \wedge (x_{n-1} \Rightarrow x_n)$.
2. $G = F \wedge (x_n \Rightarrow x_1)$.
3. $H = \bigwedge_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \neq j}} (x_i \Rightarrow \neg x_j)$.

Exercice 3.2. Les fonctions NAND et NOR sont définies comme suit :

$$\mathrm{NAND}(x, y) := \neg(x \wedge y), \quad \mathrm{NOR}(x, y) = \neg(x \vee y).$$

1. Trouver une forme DNF pour NAND et une forme DNF pour NOR.
2. Trouver une forme CNF pour NAND et une forme CNF pour NOR.
3. Trouver une représentation polynomiale pour NAND et NOR.
4. Montrer que la fonction AND, OR et la négation peuvent s'obtenir comme combinaisons des fonctions NAND et NOR.
5. Les diagrammes logiques pour les fonctions NAND et NOR sont donnés ci-dessous :



   Dessiner les diagrammes des fonctions AND, OR et négation à l'aide de ces blocs.
6. Dessiner un diagramme logique de la fonction XOR en utilisant ces blocs.

Exercice 3.3. [Transformée de Moebius] Soit f une fonction de m variables. La forme polynomiale de f peut toujours s'écrire

$$f(X_1, \dots, X_n) = \bigoplus_{u \in \{0,1\}^n} f_u X_1^{u_1} \cdots X_n^{u_n}$$

ou $f_u \in \{0, 1\}$ et par définition $X_i^1 = X_i$ et $X_i^0 = 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $u = (u_1, \dots, u_n)$ dans $\{0, 1\}^n$ on note $x \subseteq u$ ssi $x_i \Rightarrow u_i$ pour tout i. Le but de l'exercice est de montrer la relation suivante entre le vecteur des valeurs de f et sa représentation polynomiale :

$$f(x) = \bigoplus_{u \subseteq x} f_u \quad \text{et} \quad f_u = \bigoplus_{x \subseteq u} f(x)$$

1. Soit $u \in \{0, 1\}^n$ et la fonction monôme $m_u(X_1, \dots, X_n) = X_1^{u_1} \cdots X_n^{u_n}$. Montrer que $m_u(x) = 1$ ssi $u \subseteq x$. En déduire la première partie du résultat.

2. On appelle transformée de Moebius l'application

$$\mathcal{M} : f = \bigoplus_{u \in \{0,1\}^n} f_u X^u \mapsto g = \bigoplus_{x \in \{0,1\}^n} f(x) X^x$$

Montrer la seconde partie en montrant que la transformé de Moebius est involutive, c'est-à-dire en montrant que $\mathcal{M} \circ \mathcal{M}$ est l'identité.

Exercice 3.4. Trouver toutes les relations sur $\{a, b\} \times \{c, d\}$ qui ne sont pas des fonctions. Trouver toutes les relations sur $\{a, b\} \times \{c, d\}$ qui ne sont pas des applications.

Exercice 3.5. Soit X un ensemble non-vide et $R \subseteq (P(X) - \emptyset) \times (P(X) - \emptyset)$ la relation définie par $(A, B) \in R$ ssi $A \cap B \neq \emptyset$.

(a) R est-elle réflexive? c'est-à-dire, $(A, A) \in R$ pour $A \in P(X) - \emptyset$?

(b) R est-elle symétrique? c'est-à-dire, $(A, B) \in R$ implique $(B, A) \in R$?

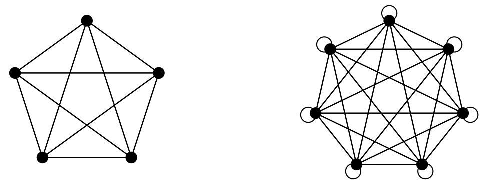
(c) R est-elle transitive? c'est-à-dire, $(A, B), (B, C) \in R$ implique $(A, C) \in R$?

Exercice 3.6. Soit R une relation transitive sur $\mathbb{Z}$ pour laquelle on sait que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si $|a - b| = 2$ alors $(a, b) \in R$. R est-elle nécessairement une relation d'équivalence? Même question si $|a - b| \in \{3, 4\}$ implique $(a, b) \in R$.

Exercice 3.7. Pour une relation R sur l'ensemble X, on définit la relation R^n par récurrence sur n avec $R^1 = R$ et $R^{n+1} = R \circ R^n$. Répondre aux questions suivantes:

1. Montrer que si X est fini, il existe $s, r \in \mathbb{N}$ tels que $s < r$ et $R^s = R^r$.
2. Trouver une relation R sur un ensemble fini X tel que $R^{n+1} \neq R^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Trouver une relation R sur un ensemble infini X tel que toutes les R^n pour $n \in \mathbb{N}$ sont distinctes.
4. Montrer qu'une relation R est transitive ssi $R^n \subseteq R$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3.8. On dit qu'une arrête d'un graphe qui relie un sommet à lui-même est une boucle. Une n-clique est un graphe avec n sommets tel que tous les couples de sommets soient connectés. Une n-clique à boucles est une n-clique dont chaque sommet possède une boucle. Par exemple, le dessin ci-dessous montre une 5-clique et une 7-clique à boucles.



Une clique est une n-clique pour un certain n. Soit R une relation d'équivalence sur un certain ensemble X. Montrer que le graphe de R est une union de cliques à boucles.