

Exercice 4.1. Trouver les 16 types possibles de posets à 4 éléments.

Exercice 4.2. Soient R et S des relations sur $A \times B$ et $C \times D$, respectivement. Le produit $R \times S$ est une relation sur $(A \times C) \times (B \times D)$ telle que $((a, c), (b, d)) \in R \times S$ ssi $(a, b) \in R$ et $(c, d) \in S$.

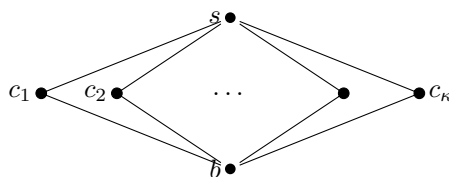
1. Montrer que si R et S sont des relations d'ordre sur les ensembles A et B , la relation $R \times S$ est une relation d'ordre sur $A \times B$. On montre ainsi que le produit de deux posets est un poset.
2. Sous quelle condition est-il vrai que le produit de $(\text{Div}(n), |)$ et $(\text{Div}(m), |)$ a la même structure que $(\text{Div}(nm), |)$? (Donner une démonstration de votre réponse.)

Exercice 4.3. On dit qu'un poset (R, \preceq) est *bien-fondé* s'il n'existe nulle chaîne infinie $\dots x_{n+1} \prec x_n \prec \dots \prec x_1$ d'éléments décroissants. On dit qu'un poset (R, \preceq) est *dense* si pour tous $x, z \in R$ tels que $x \prec z$, il existe $y \in R$ tel que $x \prec y \prec z$.

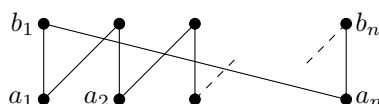
1. (\mathbb{Q}, \leq) forme-t-il un poset bien-fondé? un poset dense?
2. L'ensemble des mots formé de lettres de l'alphabet muni de l'ordre lexicographique (l'ordre du dictionnaire) est-t-il un poset bien-fondé? un poset dense?
3. On dit qu'un poset (R, \preceq) est *bien-ordonné* quand l'ordre est total et que toute partie de R possède un plus petit élément. Montrez qu'un poset est bien ordonné ssi il est bien-fondé et totalement ordonné.

Exercice 4.4. Calculez la largeur des treillis suivants

1. \mathcal{A}_κ est une antichaîne de cardinal κ .
2. \mathcal{M}_κ correspond au diagramme de Hasse ci-dessous.



3. \mathcal{C}_n , où $n \in \mathbb{N}$, qui correspond au diagramme en couronne ci-dessous



4. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ où X est un ensemble fini.

Exercice 4.5. Soit (R, \leq) un poset de cardinal supérieur à $ab + 1$ avec $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que possède soit un antichaîne de longueur supérieure à $a + 1$, soit une chaîne de longueur supérieure à $b + 1$.

Exercice 4.6. Soit n un entier qui n'est divisible par aucun carré. Soit μ la fonction de Möbius du treillis $(\text{Div}(n), |)$. Montrer que $\mu(n) = (-1)^t$ où t est le nombre de facteurs premiers de n . (Indice : on pourra établir une relation entre les diviseurs de n et un treillis Booléen approprié).

Exercice 4.7. Soit (P, \leq) un poset. On appelle *noyau linéaire* du poset (P, \leq) et on note $K(P)$ l'ensemble des éléments de P comparables à tous les éléments de P . Montrez que $K(P)$ est l'intersection de toutes les chaînes maximales de P . (On montrera avec soin que tout élément de P appartient à une chaîne maximale).

Exercice 4.8. Soit (R, \preceq) un poset.

1. Soient $a, b \in R$ tels que $a \not\preceq b$. Montrer que la relation définie par

$$x \preceq^* y \quad \text{si} \quad \begin{cases} x \preceq y \\ \text{ou} \\ x \preceq b \text{ et } a \preceq y \end{cases}$$

est un ordre sur R .

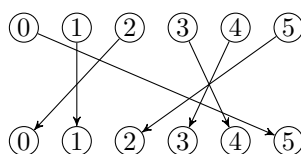
2. En supposant que R est fini, montrer que l'ordre partiel \preceq est l'intersection de tous les ordres totaux qui contiennent \preceq .

3. On considère le poset $(\mathcal{P}\mathcal{O}_{\preceq}(R), \subseteq)$ des ordres partiels sur R contenant \preceq ordonnés par l'inclusion. Montrez que les éléments maximaux de ce poset sont les ordres totaux
4. Montrez que toute chaîne C de ce poset est majorée (on pourra montrer que la relation $\leq = \bigcup_{\preceq \in C} \preceq$ est un ordre dans ce cas).
5. En déduire que l'ordre partiel \preceq est l'intersection de tous les ordres totaux qui contiennent \preceq quelque soit le cardinal de R .

Exercices complémentaires

Exercice 4.9. Une permutation sur un ensemble S est une bijection $S \rightarrow S$. Dans cet exercice, on étudie le graphe orienté $G_f = (S, A)$ associé à une permutation f , où $A = \{(s, f(s)); s \in S\}$.

1. Dessiner G_f pour la fonction f sur $\underline{6}$ donnée par le diagramme suivant :



2. Montrer que dans G_f chaque sommet a exactement une arête entrante et une arête sortante.
3. Montrer que G_f est une union disjointe de cycles (un cycle est un graphe $(\{v_1, \dots, v_m\}, E)$ avec $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_m, v_1)\}$.)
4. Montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = \text{id}$, exprimer le plus petit n tel que cela soit vrai de telle manière qu'il soit facile de le calculer. Le faire sur l'exemple de la question 1.

Exercice 4.10. Supposons que A et B sont respectivement des matrices $m \times n$ et $n \times k$ avec des coefficients dans $\{0, 1\}$. Le produit \star de A et B , noté $A \star B$, est la matrice binaire C qui vérifie

$$C_{ij} = \bigvee_{\ell=1}^n A_{i\ell} \wedge B_{\ell j},$$

pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq k$. Supposons que R est une relation sur $\underline{m} \times \underline{n}$, et que S est une relation sur $\underline{n} \times \underline{k}$. De plus, soit A et B les représentations matricielles des relations R et S . Montrer que la représentation matricielle de $S \circ R$ est $A \star B$.

Exercice 4.11. Soit $\mathcal{P} = (X, \leq)$ un poset sur un ensemble fini. Montrer que

1. \mathcal{P} admet au moins un élément minimal et au moins un élément maximal.
2. Pour tous $a, b \in X$ avec $a \leq b$ il existe $n \geq 0$ et $c_1, \dots, c_n \in X$ tels que $a \rightarrow c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_n \rightarrow b$ où dans cette notation non standard \rightarrow veut dire successeur immédiat.

Exercice 4.12. Soit $\mathcal{L} = (X, \leq)$ un treillis. Montrer que la borne supérieure et la borne inférieure de n'importe quel couple d'éléments est unique.

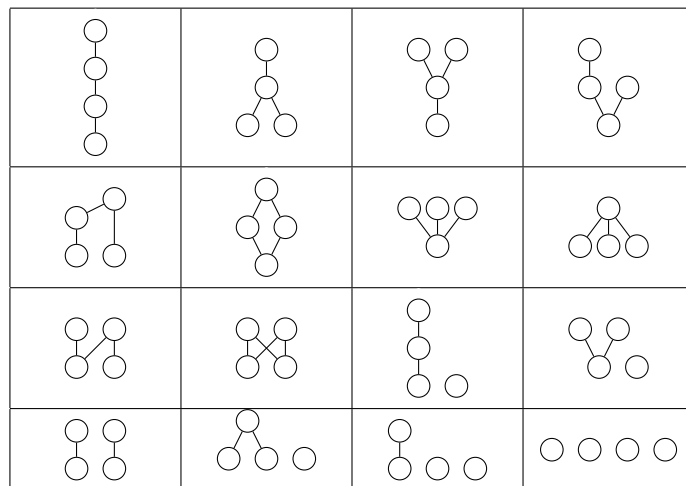
Exercice 4.13. Admettons l'axiome suivant : « Tout sous-ensemble non vide de \mathbb{N} admet un élément minimal ». L'utiliser pour prouver le principe de récurrence. Soit $P: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction telle que

1. $P(1) = 1$,
2. $\forall n \geq 1: P(n) = 1 \implies P(n + 1) = 1$.

Alors $P(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

Exercice 4.1. Voici la liste en terme de diagramme de Hasse :



Exercice 4.2. 1. On vérifie comme suit :

- (a) Réflexivité : comme $(a, a) \in R$ pour $a \in A$ et $(b, b) \in B$ pour $b \in B$, on a $((a, b), (a, b)) \in S \times R$, par définition de $S \times R$.
- (b) Antisymétrie : supposons que $((a, b), (a', b')) \in R \times S$ et $((a', b'), (a, b)) \in R \times S$. On tire de la définition de $R \times S$ que $(a, a'), (a', a) \in R$, donc $a = a'$ par antisymétrie de R . De même, on prouve que $b = b'$.
- (c) Transitivité : supposons que $((a, b), (a', b')), ((a', b'), (a'', b'')) \in R \times S$. Par définition de $R \times S$, on déduit que $(a, a'), (a', a'') \in R$ et par conséquent $(a, a'') \in R$ par transitivité de R . De la même manière $(b, b'') \in S$. D'où, par définition, $((a, b), (a'', b'')) \in R \times S$.

Afin de montrer que le produit de deux treillis est encore un treillis, soit $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ deux éléments de $A \times B$. Soient $a_3 := a_1 \wedge a_2$ et $b_3 = b_1 \wedge b_2$. Alors $(a_3, b_3) = (a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2)$: par définition, $a_3 \leq a_1$ et $a_3 \leq a_2$, et de même pour les b . D'autre part si $(a_4, b_4) \leq (a_1, b_1)$ et $(a_4, b_4) \leq (a_2, b_2)$, alors, comme $a_4 \leq a_1$ et $a_4 \leq a_2$, on sait que $a_4 \leq a_3$ et de la même façon $b_4 \leq b_3$. D'où, (a_3, b_3) est la borne inférieure de (a_1, b_1) et (a_2, b_2) . L'existence et l'unicité de la borne supérieure est prouvée de la même manière.

2. Supposons que $\text{pgcd}(n, m) = 1$. Alors pour tout $d \mid nm$ il existe un unique couple $d_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$ tel que $d = d_1 d_2$. Considérons l'application

$$f : \begin{cases} \text{Div}(n) \times \text{Div}(m) & \rightarrow & \text{Div}(nm) \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{cases}$$

Nous venons de voir que f est une bijection. Il reste à prouver que f et f^{-1} respectent les ordres. Soient $n_1, n_2 \in \text{Div}(n)$ et $m_1, m_2 \in \text{Div}(m)$ tels que $n_1 \mid n_2$ et $m_1 \mid m_2$. Alors $f(n_1, m_1) = n_1 m_1 \mid n_2 m_2 = f(n_2, m_2)$. Réciproquement, supposons que $f(m_1, n_1) = m_1 n_1 \mid m_2 n_2 = f(m_2, n_2)$. Comme n et m sont premiers entre eux, tout diviseur premier de m_1 est un diviseur de m et n'est pas un diviseur de n , ni de n_2 . De même tout diviseur premier de n_1 est un diviseur de n et n'est pas un diviseur de m , ni de m_2 . Donc $m_1 \mid m_2$ et $n_1 \mid n_2$. Ceci montre que l'application f est un isomorphisme entre $(\text{Div}(n), \mid) \times (\text{Div}(m), \mid)$ et $(\text{Div}(nm), \mid)$.

Montrons à présent que si $\text{pgcd}(n, m) \neq 1$, alors $|\text{Div}(n) \times \text{Div}(m)| \neq |\text{Div}(nm)|$. Ce qui suit montre que les structures des treillis donnés ne sont pas les mêmes. Soit $\sigma(n) := |\text{Div}(n)|$. Nous avons vu plus haut que $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ si m et n sont premiers entre eux. D'où, $\sigma(\prod_{i=1}^t p_i^{a_i}) = \prod_{i=1}^t \sigma(p_i^{a_i})$, où les p_i sont des premiers distincts et les a_i sont des entiers strictement positifs. On voit facilement que $\sigma(p_i^{a_i}) = (a_i + 1)$, si bien que $\sigma(\prod_{i=1}^t p_i^{a_i}) = \prod_{i=1}^t (a_i + 1)$. Ainsi, si $n = p^a n'$ et $m = p^b m'$ où p est un premier qui ne divise pas $m' n'$, alors $\sigma(mn) = (a + b + 1)\sigma(m' n') \neq (a + 1)\sigma(n')(b + 1)\sigma(m')$, si a et b sont tous les deux plus grands que un. Ceci montre notre assertion.

Exercice 4.3. 1. On peut considérer la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui est infinie et strictement décroissante. Donc \mathbb{Q} n'est pas bien-fondé.

Soient $x, z \in \mathbb{Q}$, alors $y = \frac{x+z}{2}$ vérifie $x < y < z$. Donc \mathbb{Q} est un poset dense.

2. La suite $(a^n b)_{n \in \mathbb{N}}$ (où $a^n = a \cdots a$ avec n répétitions de a) est une suite infinie strictement décroissante. Donc les mots de l'alphabet ne forment pas un poset bien-fondé.
Par ailleurs, il n'existe pas de mots compris entre a et aa . Donc ce poset n'est pas dense.
3. Supposons que R est bien-ordonné. Alors par hypothèse, l'ordre est total. Soient $\cdots x_{n+1} \prec x_n \prec \cdots \prec x_1$ une suite infinie de termes décroissants et $S = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse S possède un plus petit élément x_{n_0} qui satisfait à $x_{n_0} \preceq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais alors $x_{n_0+1} \prec x_{n_0} \preceq x_{n_0+1}$ ce qui est une contradiction. Donc R est bien-fondé.
Réciproquement, soit R un poset totalement ordonné et bien-fondé. Soit S un sous-ensemble de R qui ne contient pas de plus petit élément. On peut donc construire une suite infinie strictement décroissante d'éléments de S . Mais ceci contredit le fait que R est bien-fondé. Donc S n'existe pas et R est bien-ordonné.

Exercice 4.4. 1. La largeur de \mathcal{A}_κ est κ par définition.

2. Notons que $C = \{c_1, \dots, c_\kappa\}$ est une antichaîne. Soit A une antichaîne. Si A contient s ou b , A ne peut pas contenir d'autre élément. Donc C est maximale et la largeur vaut κ .
3. On remarque que les seules chaînes de \mathcal{C}_n possèdent soit un seul élément, soit deux éléments, à savoir (a_i, b_i) ou bien $(a_i, b_{i+1 \pmod n})$. Il faut donc au moins n chaînes pour recouvrir tout le poset. Cette borne inférieure est atteinte lorsqu'on prend par exemple les chaînes $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq n}$. D'après le théorème de Dilworth, on conclut que la largeur vaut n .
4. En notant $n = |X|$, on peut identifier X à $[n]$ et appliquer le théorème de Sperner : la largeur de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ vaut $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Exercice 4.5. Notons ℓ la largeur du poset. Deux cas peuvent se présenter : $\ell \geq a + 1$ ou $\ell \leq a$. Dans le premier cas, cela signifie que R possède une antichaîne de cardinal $\ell \geq a + 1$. Dans le second cas, d'après le théorème de Dilworth, il existe une décomposition de R en ℓ chaînes. Notons m le maximum de leur cardinal, de sorte que $|R| \leq \ell m \leq am$. Mais $|R| = ab + 1$, donc $m > b$ ce qui achève de démontrer l'alternative.

Exercice 4.6. L'entier n possède une décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{i=0}^{t-1} p_i$ où p_0, \dots, p_{t-1} sont des nombres premiers tous distincts. Alors, $\text{Div}(n) = \{\prod_{i=0}^{t-1} p_i^{e_i} \mid e_i \in \{0, 1\}\}$. Définissons l'application $f: \mathcal{B}_t \rightarrow \text{Div}(n)$ par $f(S) = \prod_{i \in S} p_i$. Cette application est bijective : si $d = \prod_{i=0}^{t-1} p_i^{e_i}$ et $S := \{i \mid e_i = 1\}$, alors $f(S) = d$, donc f est surjective. D'autre part, f est injective car la factorisation en nombres premiers est unique (à l'ordre près). De plus, $S_1 \subseteq S_2$ ssi $f(S_1) \mid f(S_2)$. Ainsi, f met en bijection les posets $(\mathcal{B}_t, \subseteq)$ et $(\text{Div}(n), \mid)$. La valeur $\mu(n)$ est la valeur de $\mu_{\mathcal{L}}(1, n)$ par définition, où $\mathcal{L} = (\text{Div}(n), \mid)$. A cause de cette bijection f , cette valeur est la même que la valeur de $\mu_{\mathcal{L}'}(\emptyset, \underline{t})$, où $\mathcal{L}' = (\mathcal{B}_t, \subseteq)$. D'après le théorème 4.21.(2), cette dernière égale $(-1)^{|\underline{t}|} = (-1)^t$.

Exercice 4.7. Commençons par démontrer l'indication. Soit $y \in P$. On considère le poset $(\mathcal{C}_y(P), \subseteq)$ de l'ensemble des chaînes χ de P contenant y ordonnées par l'inclusion. Une chaîne C de ce poset (c.-à.-d. un chaîne de chaînes de P totalement ordonnée) possède toujours un majorant : l'union $\cup_{\chi \in C} \chi$. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{C}_y(P)$ possède un élément maximal, c'est-à-dire une chaîne de P contenant y . Donc tout $y \in P$ appartient à une chaîne maximale.

Procédons par double inclusion. Supposons maintenant que x appartient à toute chaîne maximale. Soit y dans P . Nous venons de voir qu'il existe une chaîne maximale C telle que $y \in C$. Comme $x \in C$, x et y sont comparables donc $x \in K(P)$.

Réciproquement, soit x un élément de $K(P)$. Soit C une chaîne qui ne contient pas x . Alors, comme x est comparable à tous les éléments de P , $C' = C \cup \{x\}$ est encore une chaîne strictement plus longue que C . Donc toute chaîne maximale contient x , ce qui achève la preuve.

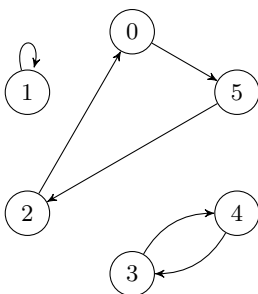
Exercice 4.8. Ce résultat est dû à E. Szpilrajn. Remarque : attention $a \not\preceq b$ n'est pas équivalent à $b \not\preceq a$! On peut par ailleurs commencer par s'assurer que l'intersection de deux ordres partiels est un ordre partiel.

1. Il faut vérifier les trois axiomes qui définissent une relation d'ordre. Soient $x, y, z \in R$. Pour la réflexivité, on a $x \preceq^* x$ car $x \preceq x$. Pour l'antisymétrie, si $x \preceq^* y$ et $y \preceq^* x$ alors quatre cas peuvent se produire :
 - $x \preceq y$ et $y \preceq x$ ce qui conduit à $x = y$ car \preceq est un ordre,
 - $x \preceq y$ et $y \preceq b$ et $a \preceq x$, alors par transitivité $a \preceq b$ ce qui est exclu,
 - ou encore $x \preceq b$, $a \preceq y$, $y \preceq b$ et $a \preceq y$, mais alors $a \preceq b$ ce qui est exclu.
 Le cas restant se traite comme le second cas. Enfin pour la transitivité, si $x \preceq^* y$ et $y \preceq^* z$, alors soit $x \preceq y \preceq z$ d'où $x \preceq z$, soit $x \preceq y \preceq b$ et $a \preceq z$, soit $x \preceq b$ et $a \preceq y \preceq z$, soit $a \preceq y$ et $y \preceq b$ ce qui n'est pas possible

2. Il est clair que l'ordre \preceq est contenu dans l'intersection des ordres totaux le contenant. Il reste à démontrer que si $a \not\preceq b$, alors il existe un ordre total \trianglelefteq contenant \preceq pour lequel $a \not\trianglelefteq b$, c'est-à-dire (comme l'ordre est total) $b \triangleleft a$.
On a vu à la question précédente comment raffiner \preceq de sorte que $b \preceq^* a$. Si le nouvel ordre \preceq^* n'est pas total, on ré-applique le procédé tant qu'il existe des couples (c, d) non comparables dans $R \times R$. Comme $R \times R$ est fini, il n'est nécessaire de le faire qu'un nombre fini de fois et l'on obtient un ordre total \trianglelefteq tel que $b \triangleleft a$ comme attendu.
3. Si un ordre n'est pas total, alors il existe $(a, b) \in R$ non comparables et la question 1 montre comment trouver un ordre strictement plus grand pour l'inclusion. Donc cet ordre n'est pas maximal.
Par ailleurs, si un ordre \preceq n'est pas maximal, alors, il existe un ordre \preceq' tel que $\preceq \subset \preceq'$. Soient deux éléments a et b distincts tel que $a \preceq' b$ et $a \not\preceq b$. Mais alors $b \not\preceq a$, car sinon on aurait encore $b \preceq' a$. Donc a et b ne sont pas comparables et \preceq n'est pas total.
4. Soit à présent C une chaîne d'ordres et posons $\leq = \bigcup_{\trianglelefteq \in C} \trianglelefteq$. Montrons que la relation \leq est un ordre¹. La relation \leq est clairement réflexive. Supposons que $a \leq b$ et $b \leq a$. Alors il existe des ordres \trianglelefteq_1 et $\trianglelefteq_2 \in C$ tels que $a \trianglelefteq_1 b$ et $b \trianglelefteq_2 a$. Comme l'ordre sur C est total, soit $\trianglelefteq_1 \subseteq \trianglelefteq_2$ soit $\trianglelefteq_2 \subseteq \trianglelefteq_1$. Dans le premier cas, on en déduit que $a \trianglelefteq_2 b$, donc par antisymétrie de \trianglelefteq_2 , $a = b$. Enfin, supposons que $a \leq b$ et $b \leq c$, alors il existe des ordres \trianglelefteq_1 et $\trianglelefteq_2 \in C$ tels que $a \trianglelefteq_1 b$ et $b \trianglelefteq_2 c$. Comme l'ordre sur C est total, soit $\trianglelefteq_1 \subseteq \trianglelefteq_2$ soit $\trianglelefteq_2 \subseteq \trianglelefteq_1$. Dans le premier cas, on en déduit que $a \trianglelefteq_2 b$, donc par transitivité $a \trianglelefteq_2 c$ et finalement $a \leq c$. Dans le second cas on fait de même. Donc \leq est un ordre et majore la chaîne C .
5. Le lemme de Zorn appliqué au poset $(\mathcal{PO}_{\preceq^*}(R), \subseteq)$ montre qu'il existe un élément maximal disons \leq . Cet ordre \leq est un ordre total qui contient \preceq et par construction vérifie que $a \not\leq b$. On peut donc raisonner comme pour la question 2.

Exercices complémentaires

Exercice 4.9. 1. Voici une illustration possible du graphe G_f :



2. On peut supposer sans perte de généralité que $S = \underline{n}$. Comme f est une application, tout sommet de G possède exactement une arête sortante. En effet, s'il existait un sommet $v \in \underline{n}$ dépourvu d'arête sortante, l'application ne serait pas définie sur v , si v était doté de plus de deux arêtes sortantes, v serait envoyé par f sur plus de deux éléments et f ne saurait être une fonction. Comme f est surjective, tout sommet v possède une arête entrante, puisque il existe un élément envoyé sur v par f . Enfin, comme f est injective, tout sommet reçoit au plus une arête entrante, puisque que sinon il y aurait deux éléments de \underline{n} envoyés sur la même image.
3. Notons C_1, C_2, \dots, C_k les composantes connexes du graphe. Par définition, G_f est l'union disjointe des $(C_j)_{1 \leq j \leq k}$. Soit C_j l'une de ces composantes. Comme C_j est non vide, il existe un élément $x_0 \in C_j$, qui possède une unique arête sortante, disons (x_0, x_1) . On construit de cette façon par récurrence une suite d'arête (x_i, x_{i+1}) pour tout $i \in \mathbb{N}$. Mais comme C_j est fini, il existe au moins deux éléments x_s et x_t égaux (pour $s \neq t$). Soit σ l'indice du plus petit élément répété et $\tau > \sigma$ le plus petit indice t tel que $x_\sigma = x_t$. On peut remarquer que $\sigma = 0$. Sinon, on aurait $x_{\sigma-1} \neq x_\tau$ mais le graphe posséderait les arêtes $(x_{\sigma-1}, x_\sigma)$ et (x_τ, x_σ) , ce qui est impossible d'après la question précédente. On peut conclure que $C = (x_0, \dots, x_{\tau-1})$ est un cycle. Mais d'après la question 1, il n'y a pas d'autres arêtes entrant ou sortant de C . Comme C_j est connexe, $C_j = C$ et nous avons bien montré que G_f est l'union de cycles disjoints.

¹Caveat : en général, l'union d'ordres quelconques n'est pas un ordre !

4. De la question précédente, nous pouvons déduire que la permutation f se décompose comme une composée de cycles à supports disjoints $f = C_1 \circ \dots \circ C_k$. Comme les supports sont disjoints, les cycles commutent entre eux, donc $f^n = C_1^n \circ \dots \circ C_k^n$ et $f^n|_{\text{Supp}(C_j)} = C_j^n|_{\text{Supp}(C_j)}$. Donc $f^n = \text{id}$ ssi $C_j^n = \text{id}$ pour tout $j \leq k$. Or $C_j^n = \text{id}$ ssi n est un multiple de $|C_j|$. Finalement, le plus petit n tel que $f^n = \text{Id}$ est $n = \text{ppcm}(|C_1|, \dots, |C_k|)$.

Exercice 4.10. Soit A la matrice qui représente S et B celle de R , comme indiqué par l'exercice. Par définition, $S \circ R = \{(i, j) \mid \exists \ell: (i, \ell) \in S \wedge (\ell, j) \in R\}$. Ainsi, $(i, j) \in S \circ R$ ssi il existe ℓ tel que $A_{i\ell} \wedge B_{\ell j}$ vaut un, ce qui est le cas ssi $\bigvee_{\ell=1}^n A_{i\ell} \wedge B_{\ell j}$ vaut un.

- Exercice 4.11.** 1. Supposons que \mathcal{P} ne possède pas d'élément maximal. Soit a_0 un élément de \mathcal{P} . Comme il n'est pas maximal, il existe un élément $a_1 > a_0$. Mais a_1 n'est pas maximal, dont il existe un élément $a_2 > a_1$. On peut ainsi construire une suite infinie d'éléments $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tels que pour tout j , $a_{j+1} > a_j$. Comme \mathcal{P} est fini, deux éléments de cette suite, disons a_i et a_j ($j > i$), sont égaux. Par transitivité, $a_i \leq a_{i+1} \leq \dots \leq a_j = a_i$ donc, $a_i = a_{i+1} = \dots = a_j$ ce qui contredit le fait que $a_i < a_{i+1}$. Donc \mathcal{P} possède un élément maximal. *Mutatis mutandis*, on prouve encore que \mathcal{P} possède un élément minimal.
2. Pour $c, d \in X$, notons $[c, d]$ l'ensemble $\{x \in X \mid c \leq x \leq d\}$. Considérons le poset fini $\mathcal{P}_1 := \{x \in [a, b] \mid a < x\}$. D'après la question précédente, il existe un élément minimal c_1 de \mathcal{P}_1 . Alors c_1 est un successeur direct de a , puisqu'autrement, s'il existe d tel que $a < d < c_1$, alors $a < d \leq b$, donc $d \in \mathcal{P}_1$, ce qui contredit la minimalité de c_1 . De plus, $|\mathcal{P}_1| < |\mathcal{P}_0|$, où $\mathcal{P}_0 := [a, b]$, puisque $a \in \mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1$. Par récurrence, définissons pour $i \geq 2$ le poset $\mathcal{P}_i := \{x \in \mathcal{P}_{i-1} \mid c_{i-1} < x\}$ et c_i comme l'élément minimal de \mathcal{P}_i . De la même manière qu'auparavant, on voit que c_i est un successeur direct de c_{i-1} . Comme $c_{i-1} \in \mathcal{P}_{i-1} - \mathcal{P}_i$, le cardinal de $|\mathcal{P}_i|$ décroît strictement et donc il existe un certain n tel que $\mathcal{P}_{n+1} = \{b\}$ et $\mathcal{P}_{n+2} = \emptyset$. Ceci prouve que $a \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \dots \rightarrow c_n \rightarrow b$ et prouve le théorème.

Exercice 4.12. Soient a et b deux éléments du treillis \mathcal{L} . Soient c et c' leur borne inférieure. Alors par définition, comme c est la borne inférieure $c' \leq c$. De même $c \leq c'$. Comme l'ordre est une relation antisymétrique, $c = c'$.

Exercice 4.13. Introduisons l'ensemble N des entiers n tels que $P(n) = 0$. Supposons que $N \neq \emptyset$ et raisonnons par l'absurde. Alors, N possède un élément minimal en vertu de l'axiome de \mathbb{N} . Appelons le m . Comme $P(1) = 1$, $m > 1$. Par définition de N et de m , $P(m-1) = 1$. Mais d'après l'hypothèse 2. sur P , ceci implique $P(m) = 1$. Donc m n'appartient pas à N , une contradiction. Aussi l'ensemble N est vide.