ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Examen final 13.1.2011

Composition de mathématiques discrètes

13.1.2011

– Utilisez une feuille différente pour chaque problème et numérotez les pages.
– Ecrivez votre nom et le numéro du problème traité en haut de chaque feuille supplémentaire.
– L'usage de documents et de matériel électronique est prohibé durant cette épreuve. Seul un formulaire personnel rédigé sur une feuille A4 recto-verso est toléré ainsi qu'un dictionnaire de traduction vers votre langue maternelle dépourvu d'annotations.
– Les résultats des questions intermédiaires peuvent être admis pour la suite de chaque problème.
– La durée de l'épreuve est de trois heures. Bonne chance.

Nom :

Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4	Problème 5
7 points	20 points	5 points	5 points	15 points
Problème 6	**Problème 7**	**Problème 8**	**Problème 9**	**Problème 10**
5 points	7 points	8 points	8 points	20 points

Total
100 points

Nombre de pages utilisées : 7 feuilles + ……feuilles supplémentaires.

Notations utilisées pour l'examen

1. Selon l'usage francophone, les notions s'entendent toujours au sens large. Par exemple, « inférieur » signifie « strictement inférieur ou égal », etc.
2. Quand E est un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.
3. Le symbole $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, \ldots\}$, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, $[n]$ désigne l'ensemble $\{1, 2 \ldots, n\}$.
4. La relation $a|b$ se lit « a divise b ».
5. Deux posets $P = (E, \preccurlyeq)$ et $Q = (F, \trianglelefteq)$ sont dits *isomorphes* quand il existe une bijection $\phi : E \to F$ telle que pour tout $x, y \in E$, $x \preccurlyeq y$ si et seulement si $\phi(x) \trianglelefteq \phi(y)$.
6. Si G est un graphe, $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de G.

Problème 1 [7 points]. Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ non vide vérifiant la propriété

$$\forall X, Y \in \mathcal{A}, \quad \exists Z \in A, \quad Z \subseteq X \cap Y.$$

On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\sim$ par $A \sim B$ s'il existe $X \in \mathcal{A}$ tel que $X \cap A = X \cap B$. Prouver que $\sim$ est une relation d'équivalence. Quelle est la classe de $\emptyset$ et la classe de E ?

Solution : Réflexivité : Comme $\mathcal{A}$ est non vide, il existe $X \in \mathcal{A}$ et alors pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $X \cap A = X \cap A$ et $A \sim A$.
Symétrie : s'il existe $X \in \mathcal{A}$ tel que $X \cap A = X \cap B$, alors pour le même X $X \cap B = X \cap A$, donc $A \sim B$ équivaut à $B \sim A$.
Transitivité : Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Supposons que $A \sim B$ (disons $X \cap A = X \cap B$ pour $X \in \mathcal{A}$) et $B \sim C$ (disons $Y \cap B = Y \cap B$ pour $Y \in \mathcal{A}$). Alors il existe $Z \in \mathcal{A}$ tel que $Z \subseteq X \cap Y$. Mais comme $Z \subseteq X$, alors $Z \cap A = Z \cap B$. De même, $Z \cap B = Z \cap C$. Donc $Z \cap A = Z \cap C$ ce qui prouve que $A \sim C$.

La classe de $\emptyset$ comprend tous les ensembles $A \in \mathcal{P}(E)$ tels qu'il existe un $X \in \mathcal{A}$ satisfaisant $X \cap A = X \cap \emptyset = \emptyset$. Donc $[\emptyset] = \{A \subseteq E; \exists X \in \mathcal{A}, A \subseteq X^c\}$. La classe de E contient tous les ensembles $A \in \mathcal{P}(E)$ tels qu'il existe un $X \in \mathcal{A}$ satisfaisant $X \cap A = X \cap E = X$. Donc $[E] = \{A \subseteq E; \exists X \in \mathcal{A}, X \subseteq A\}$.

Problème 2 [20 points]. Soit $d \geq 1$ un entier. On munit $\mathbb{N}^d$ de l'ordre lexicographique (noté $\preccurlyeq$) et de l'ordre $\trianglelefteq$ défini par $a \trianglelefteq b$ si pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $a_i \leq b_i$.

1. Montrer que toute intersection finie d'ordres partiels est un ordre partiel.
2. Dire si $\preccurlyeq$ et $\trianglelefteq$ sont des ordres totaux.
3. Soit n un entier naturel et P un poset défini sur $[n]$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
   (a) P est l'intersection de d ordres totaux.
   (b) P est isomorphe à un sous-poset de $(\mathbb{N}^d, \trianglelefteq)$.
4. Montrer que lorsque $d = 2$, les conditions précédentes sont encore équivalentes à :
   (c) Il existe un poset Q sur $[n]$ tel que $x < y$ ou $x > y$ dans Q si et seulement si x et y sont incomparables dans P.

   Indication : Etudier les relations $\trianglelefteq_\sharp = (\leq_P \cup \leq_Q)$ et $\trianglelefteq_\flat = (\leq_P \cup \geq_Q)$.

Solution :

1. Soit $(\leq_i)_{i \in I}$ une famille finie et non vide d'ordres partiels sur un ensemble E et $\leq_\cap = \bigcup_{i \in I} \leq_i$ leur intersection. Il faut vérifier sur $\leq_\cap$ les trois hypothèses qui définissent les ordres partiels. *Réflexivité :* Si $a \in E$, pour tout $i \in I$, $a \leq_i a$ (réflexivité de $\leq_i$), donc $a \leq_\cap a$. *Antisymétrie :* Soient a et b dans E tels que $a \leq_\cap b$ et $b \leq_\cap a$. Alors en particulier pour un certain $i_0 \in I$, on a $a \leq_{i_0} b$ et $b \leq_{i_0} a$. Or la relation $\leq_{i_0}$ est antisymétrique. Donc $a = b$. *Transitivité :* Soient a, b, c dans E tels que $a \leq_\cap b$ et $b \leq_\cap c$. Alors pour tout $i \in I$, $a \leq_i b$ et $b \leq_i c$. Mais par transitivité de $\leq_i$, on a encore $a \leq_i c$. Il s'ensuit que $a \leq_\cap c$.
2. L'ordre $\preccurlyeq$ est toujours total. L'ordre $\trianglelefteq$ n'est total que si $d = 1$.
3. Supposons que P est l'intersection de d ordres totaux $\leq_1$, ..., $\leq_d$. Pour tout $1 \leq j \leq d$, on peut écrire la suite des éléments du poset par ordre croissant selon l'ordre $\leq_j$ et noter $\omega_j(a)$ le rang auquel apparaît a dans la suite. Il est clair que $a \leq_i b$ si et seulement si $\omega_i(a) \leq \omega_i(b)$. Mais alors $a \leq_P b$ si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq d$, $\omega_i(a) \leq \omega_i(b)$. Autrement dit, en posant $\omega : [n] \to \mathbb{N}^d$ avec $\omega(a) = (\omega_1(a), \ldots, \omega_d(a))$, on a construit un isomorphisme de posets entre P et $\omega(P)$, cqfd.

   Si P est isomorphe à un sous-poset de $\mathbb{N}^d$, alors raisonne directement sur un sous-ensemble de $\mathbb{N}^d$ et on note $\preccurlyeq_j$ l'ordre défini par $a \preccurlyeq_j b$ si $(a_j, \ldots, a_d, a_1, \ldots, a_{j-1}) \preccurlyeq (b_j, \ldots, b_d, b_1, \ldots, b_{j-1})$. Comme $\preccurlyeq$ est un ordre total, $\preccurlyeq_j$ est aussi un ordre total. De plus, si $a \trianglelefteq b$, alors pour tout i, $a_i \leq b_i$ donc a fortiori $a \preccurlyeq_j b$ pour tout $1 \leq j \leq d$. Réciproquement, si pour tout j, $a \preccurlyeq_j b$, alors en particulier $a_i \leq b_i$ pour tout i donc $a \trianglelefteq b$. Donc P est l'intersection de d ordres totaux.
4. On définit $\leq_Q$ sur $\mathbb{N}^2$ par $(x, y) <_Q (x', y')$ ssi $x < x'$ et $y' < y$. Ceci permet de montrer que (b) implique (c).

   Réciproquement, sous l'hypothèse (c), étant donné deux éléments distincts de $[n]$, on a soit $a <_P b$, soit $a <_Q b$ soit $a >_P b$ soit $a >_Q b$. On définit deux relations $\trianglelefteq_\sharp = (\leq_P \cup \leq_Q)$ et $\trianglelefteq_\flat = (\leq_P \cup \geq_Q)$. Fait remarquable, ces relations sont encore des ordres. En effet la réflexivité et symétrie sont immédiates à montrer. Quant à la transitivité, nous montrons un exemple significatif. Soit $x <_P y <_Q z$ et supposons que $x \not\trianglelefteq_\sharp z$, par exemple $x >_P z$. Mais alors $z <_P y$ ce qui exclut $y <_Q z$. Tous les cas peuvent se traiter par de tels arguments. À cause de la remarque, on observe que $\trianglelefteq_\sharp$ et $\trianglelefteq_\flat$ sont des ordres totaux et $\leq_P = \trianglelefteq_\sharp \cap \trianglelefteq_\flat$ cqfd.

Problème 3 [5 points]. Soit $L = (E, \leq)$ un treillis totalement ordonné. Soient m et n des entiers supérieurs à 2 et soit $(x_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ une famille d'éléments de E. Prouvez ou donnez un contre-exemple aux inégalités suivantes :

$$\sup_{1\leq j\leq m}\left(\inf_{1\leq i\leq n} x_{i,j}\right) \leq \inf_{1\leq i\leq n}\left(\sup_{1\leq j\leq m} x_{i,j}\right),$$

$$\inf_{1\leq i\leq n}\left(\sup_{1\leq j\leq m} x_{i,j}\right) \leq \sup_{1\leq j\leq m}\left(\inf_{1\leq i\leq n} x_{i,j}\right).$$

On commencera par justifier l'existence des quantités mises en jeu.

Solution : Dans un treillis, la borne inférieure et supérieure existent toujours pour deux éléments. Pour t éléments $(y_i)_{1\leq i\leq t} \subseteq E$, on peut raisonner par récurrence considérer $z = (\inf_{1\leq i\leq t-1} y_i) \wedge y_t$. Par définition z minore $\inf_{1\leq i\leq t-1} y_i$ et y_t, donc aussi chacun des y_i pour $1 \leq i \leq t-1$. D'autre part, tout minorant commun z' à tous les $(y_i)_{1\leq i\leq t}$ est un minorant commun à $(y_i)_{1\leq i\leq t}$ donc minore $\inf_{1\leq i\leq t-1} y_i$. Mais comme z' minore $\inf_{1\leq i\leq t-1} y_i$ et y_t, par définition de l'inf de deux éléments, $z' \leq z$. Ceci prouve que $\inf_{1\leq i\leq t} y_i$ existe et vaut z. On fait de même pour la borne supérieure.

On considère le cas $x_{1,1} = x_{2,2} = 1$ et $x_{1,2} = x_{2,1} = 2$. Alors

$$\sup_{1\leq j\leq m}\left(\inf_{1\leq i\leq n} x_{i,j}\right) = 1$$

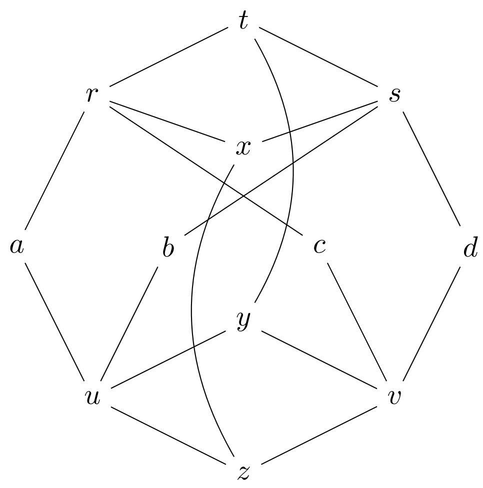
$$\inf_{1\leq i\leq n}\left(\sup_{1\leq j\leq m} x_{i,j}\right) = 2$$

Ce qui montre que seule la première inégalité est possiblement vraie mais que la seconde est fausse.

D'autre part, notons (i_0, j_0) l'indice qui réalise $\sup_{1\leq j\leq m}(\inf_{1\leq i\leq n} x_{i,j})$ et (i_1, j_1) l'indice qui réaliseinf$_{1\leq i\leq n}\left(\sup_{1\leq j\leq m} x_{i,j}\right)$. Par définition de l'inf, $x_{i_0,j_0} \leq x_{i,j_0}$ pour tout i. De même pour tout j, $x_{i_1,j} \leq x_{i_1,j_1}$. En regroupant, on a

$$x_{i_0,j_0} \leq x_{i_1,j_0} \leq x_{i_1,j_1}.$$

Si l'on enlève l'hypothèse que L est totalement ordonné, on peut considérer le treillis donné par le diagramme ci-dessous



pour se rendre compte en prenant $x_{1,1} = a$, $x_{2,1} = b$, $x_{1,2} = c$ et $x_{2,2} = d$ que aucune des deux inégalités n'est vérifiée car les deux quantités en jeu, à savoir x et y, ne sont pas comparables.

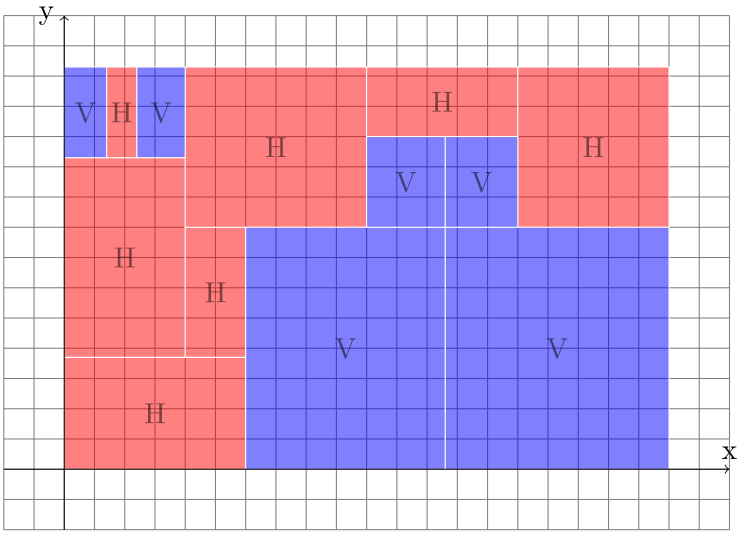
Problème 4 [5 points]. Soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1})$ une suite de $n^2 + 1$ entiers distincts. Montrer que a contient une sous-suite monotone de longueur $n + 1$.

Solution :
On introduit l'ordre suivant sur $[1, n^2+1]$: pour tout $i, j \in [1, n^2+1]$, $i \trianglelefteq j$ si $i \leq j$ et $a_i \leq a_j$ (où $\leq$ est l'ordre usuel sur les entiers). On observe que de toute chaîne $i_1 \trianglelefteq i_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq i_k$ découle une sous-suite croissante de a. De plus, de toute antichaîne i_1, ..., i_k, où sans perte de généralité on peut supposer que $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$, on peut tirer une sous-suite décroissante. En effet, si $i \ntrianglelefteq j$ et $i \leq j$, alors $a_i \geq a_j$. Soit C_1, ..., C_ℓ une décomposition minimale de $[1, n^2 + 1]$ en chaînes. S'il existe une chaîne de longueur $n + 1$, on a trouvé une sous-suite croissante. Sinon, nécessairement $\ell > n$ i.e. $\ell \geq n + 1$. Mais d'après le théorème de Dilworth, ℓ est la longueur d'une antichaîne maximale. Dans ce cas il existe une sous-suite décroissante de longueur $n + 1$.

Problème 5 [15 points]. On se propose de démontrer le théorème suivant selon deux manières différentes. Les deux questions peuvent être resolues indépendamment.

> Tout rectangle pavé de sous-rectangles dont un côté au moins est entier possède un côté entier.

Un exemple d'un tel pavage est illustré par le dessin ci-dessous. La lettre H ou V au milieu d'une tuile indique que le côté entier de la tuile est vertical ou horizontal.



Sans perte de généralité, on peut supposer que chaque tuile du pavage ne possède qu'un côté entier (si les deux côtés sont entiers, on oublie que l'un des deux côtés est entier). On note le grand rectangle $\mathcal{R}$. On le place dans un repère orthonormé dont les axes sont parallèles aux côtés du rectangle et tel que le coin inférieur gauche ait pour coordonnées $(0, 0)$.

1. On considère le multigraphe $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets des sous-rectangles et où E contient tous les couples (a, b) tels que le segment $[a, b]$ est le côté entier d'une tuile.
   (a) G est-il toujours un multigraphe planaire ?
   (b) Étudier le degré des sommets de G.
   (c) Soit c un chemin eulérien maximal dans G partant du coin inférieur gauche du grand rectangle. Déterminer le lieu de l'extrémité de c.
   (d) Conclure
2. Soit $\Gamma = (S \sqcup T, A)$ le graphe biparti où S est l'ensemble des sommets des tuiles dont les deux coordonnées sont entières et T est l'ensemble des tuiles. Deux sommets $s \in S$ et $t \in T$ sont reliés si s est un sommet de la tuile t.
   (a) Montrer que le cardinal de A est pair.
   (b) Quelle valeur peut prendre le degré d'un sommet de $s \in S$? On distinguera les cas où s est un coin de $\mathcal{R}$ ou non.
   (c) Conclure.
3. (Hors barème) Proposez votre propre preuve de ce résultat.

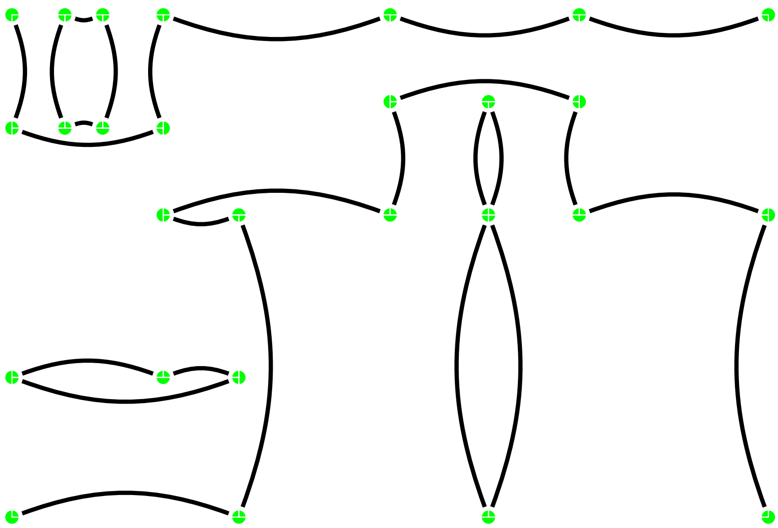
Solution :

1. Le multigraphe est toujours planaire car on peut dessiner les arêtes le long de l'intérieur des côtés.

   Le degré des sommets est 1 quand le sommet est un coin du grand rectangle, 2 s'il est sur un bord du grand rectangle ou à l'intérieur le long d'un côté d'une tuile, 4 s'il est le coin de 4 tuiles.

   Un chemin eulérien qui commence en un sommet de degré impair doit s'arêter en un sommet de degré impair. Les seules possibilités sont des coins du grand rectangle.

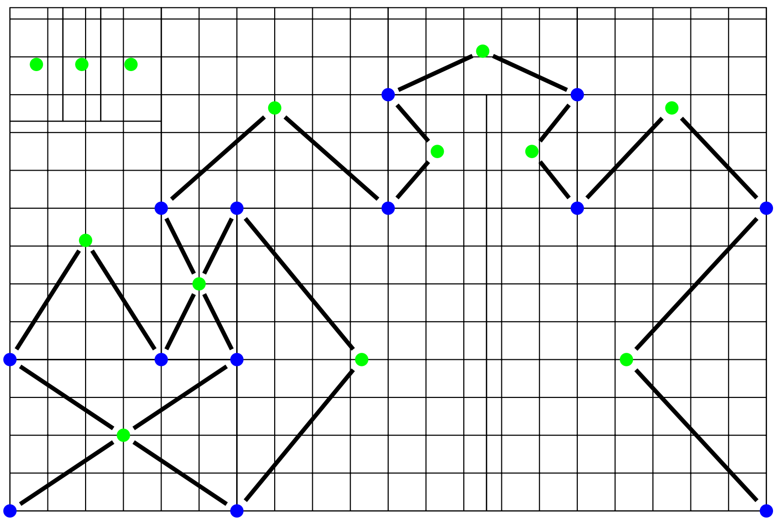
   Finalement si le coin atteint est le coin inférieur droit, la longueur du côté horizontale de $\mathcal{R}$ est la somme algébrique des longueurs horizontales parcourues le long du chemin : c'est une somme d'entier donc la longueur est entière. Le même raisonnement s'applique aux autres coins en remplaçant horizontal par vertical.



2. Si un sommet s d'une tuile t a ses deux coordonnées entières, l'autre sommet s' au bout d'un côté entier de la tuile t a aussi ses deux deux coordonnées entières. On peut ainsi grouper par deux les arêtes (s,t) et (s',t), ce qui montre qu'il y a un nombre pair d'arêtes.

   Un sommet s de S est de degré 1 s'il est un coin du rectangle $\mathcal{R}$. Sinon il est de degré 2 ou 4 selon qu'il est le coin de deux tuiles ou de quatre tuiles.

   Soit m le nombre d'arêtes. Alors $m = \sum_{s\in S} \deg s$. Mais $m \equiv 0 \mod 2$, $\deg s \equiv 0 \mod 2$ si $s \in S$ n'est pas un coin de $\mathcal{R}$ et $\deg s \equiv 1 \mod 2$ si $s \in S$ est un coin de $\mathcal{R}$. Donc $\sum_{s\in S, \text{coin de } \mathcal{R}} 1 \equiv 0 \mod 2$. Or comme le coin inférieure gauche de $\mathcal{R}$ est dans S, il y a au moins un autre coin de $\mathcal{R}$ dans S. Ce coin a donc ses coordonnées entières par définition de S et ceci montre que $\mathcal{R}$ possède un côté entier.



3. Pour d'autres preuves, on pourra se réferrer à Stan Wagon, *Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle*, Amer. Math. Monthly, **94**, 1987, 7, p 601–617

Problème 6 [5 points]. Prouver que dans tout graphe fini, il existe deux sommets de même degré.

Solution : Soit G un graphe à n sommets. Raisonnant par l'absurde, on suppose que tous les sommets ont des degrés distincts. On remarque que tous les sommets sont de degré strictement inférieur à n. Les valeurs possibles des degrés sont donc $\{0, \dots, n-1\}$. Il existe donc un sommet de degré 0, un de degré 1, … et un sommet de degré $n-1$, car toute injection entre deux ensembles de même cardinal est aussi une surjection. Mais un sommet de degré $n-1$ doit être voisin de tous les autres sommets du graphe ; en particulier, il ne peut pas exister de sommet de degré 0 s'il existe un sommet de degré $n-1$ ce qui est une contradiction.

Problème 7 [7 points]. Dans un graphe G de circonférence 5 dont le degré de tout sommet est supérieur à d, prouver que G compte au moins $d^2 + 1$ sommets. Dessiner un tel graphe G à exactement $d^2 + 1$ sommets lorsque $d = 2$ et $d = 3$.

Solution : On considère un sommet v du graphe. v a au moins d voisins ; on considère ses d premiers voisins $v_1, \ldots, v_d$. Chaque v_i a au moins $d - 1$ voisins distincts de v ; appelons $v_{i1}, \ldots, v_{i,d-1}$ les $d - 1$ premiers tels voisins de v_i. Les sommets $v, \{v_i\}$ et $\{v_{ij}\}$ doivent être tous distincts, sinon il existerait un cycle de longueur inférieure à 5. G contient donc au moins $1 + d + d(d - 1) = d^2 + 1$ sommets distincts.
Pour le cas $d = 2$, on prend un cycle de longueur 5. Pour le cas $d = 3$, on prend le graphe de Petersen.

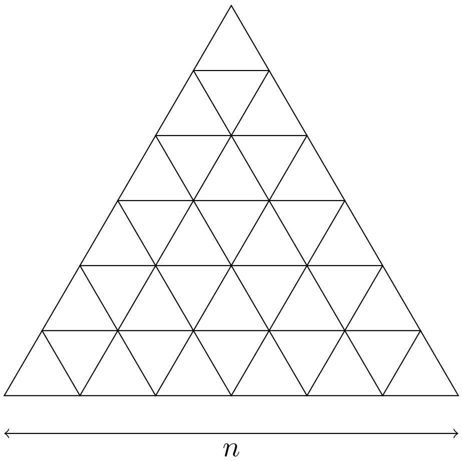
Problème 8 [8 points]. Exhiber une antichaîne de longueur n puis calculer la largeur du poset $([2n], |)$ pour tout entier naturel n .

Solution : On commence par remarque que l'ensemble $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ forme une antichaîne. En effet, si $k > n$, tout multiple de k est supérieur à $2k > 2n$ et ne peut possèder un successeur pour $|$ dans $[2n]$. Soit d'autre part un sous-ensemble L de cardinal supérieur à $n+1$. Chacun des entiers de L peut s'écrire d'une unique manière sous la forme $2^k\alpha$ avec α impair. Mais alors α peut prendre au plus n valeurs distinctes. Donc il existe dans L, en application du lemme des tiroirs, deux entiers $m = 2^k\alpha$ et $m' = 2^{k'}\alpha'$ tels que $\alpha = \alpha'$. En supposant que $k < k'$, on a que $m|m'$ ce qui prouve que L n'est pas une antichaîne. Ainsi la largueur du poset est n.

Problème 9 [8 points]. Soit G un graphe où tous les cycles de longueur impaire s'intersectent, c'est-à-dire que n'importe quel couple de cycles de longueur impaire a (au moins) un sommet en commun. Prouver que le nombre chromatique vérifie $\chi(G) \leq 5$.

Solution : Si G ne contient aucun cycle de longueur impaire, il est biparti et donc 2-coloriable. Sinon, on enlève du graphe les sommets correspondant à un cycle de longueur impaire. Ceci détruira tous les cycles de longueur impaire, puisqu'ils ont tous un sommet commun avec le cycle enlevé. Le graphe G' obtenu est donc biparti et 2-coloriable. Pour colorier les sommets du cycle enlevé, il suffit de 3 couleurs. G est donc 5-coloriable.

Problème 10 [20 points]. On note a_n le nombre de triangles équilatéraux quelconques dans le pavage d'un triangle équilatéral de côté n par des triangles équilatéraux de côté 1. Par convention, on fixe $a_0 = 0$. On appelle encore $S(z)$ la série formelle $S(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.



1. Montrer que a_n vérifie la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{6n^2 + 16n + 9 - (-1)^n}{8}$$

2. On définit la série formelle suivante

$$R(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{6n^2 + 16n + 9 - (-1)^n}{8} z^n$$

   Exprimer $R(z)$ sous forme de fraction rationnelle.

3. Exprimer $S(z)$ en fonction de z et $R(z)$.
4. Montrer que

$$S(z) = \frac{1}{16\,(1-z)} + \frac{1}{8\,(1-z)^2} - \frac{7}{4\,(1-z)^3} + \frac{3}{2\,(1-z)^4} + \frac{1}{16\,(1+z)}.$$

5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{4n^3 + 10n^2 + 4n - 1 + (-1)^n}{16}.$$

Solution :

1. Quand on ajoute une rangée de triangles, on peut créer d'une part $1+2+\cdots+(n+1)$ triangles supplémentaires de forme $\triangle$ de largeur respective $(n+1)$, n, $\ldots 1$, soit $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ au total. On peut aussi créer n, $n-2$, $\ldots$triangles de forme $\bigtriangledown$ et de largeur 1, 2, 3 $\ldots$, soit au total $2\frac{(n/2+1)(n/2)}{2}$ si n est pair et $\frac{n+1}{2}+2\frac{((n-1)/2+1)((n-1)/2)}{2}$ si n est impair. En rassemblant les termes, on arrive à $\frac{6n^2+16n+8}{8}$ quand n est pair et $\frac{6n^2+16n+10}{8}$ pour n impair, ce qui coincide avec l'énoncé.
2. Idéalement, on souhaite trouver des coefficients α, β et γ tels que
$$\frac{6n^2+16n+9}{8} = \alpha(n+2)(n+1)+\beta(n+1)+\gamma.$$
Il vient $\alpha = 3/4$, $\beta = 16/8 - 3\alpha = -1/4$ et $\gamma = 9/8 - 2\alpha - \beta = -1/8$. On en tire
$$R(z) = \alpha\,\partial^2\frac{1}{1-z} + \beta\,\partial\frac{1}{1-z} + \gamma\frac{1}{1-z} - \frac{1}{8}\frac{1}{1+z}.$$
D'où
$$R(z) = \frac{3}{2(1-z)^3)} - \frac{1}{4(1-z)^2} - \frac{1}{8(1-z)} - \frac{1}{8}\frac{1}{1+z} = \frac{1+2z}{(1+z)(1-z)^3}.$$
3. On écrit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}z^{n+1} = a_n z^{n+1} + \frac{6n^2+16n+9-(-1)^n}{8}z^{n+1}$ et on somme sur n. On a alors
$$S(z) - a_0 = zS(z) + zR(z)$$
D'où
$$S(z) = \frac{zR(z)}{(1-z)} = \frac{z(2z+1)}{(1+z)(1-z)^4}$$
4. Par le calcul. On réduit la fraction de l'énoncé pour se ramener à celle obtenue à la question précédente. Noter qu'il est plus facile de réduire une fraction que de la décomposer en éléments simples.
5. On a
$$S(z) = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{1}{8}\cdot\partial\frac{1}{1-z} - \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}\partial^2\frac{1}{1-z} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\partial^3\frac{1}{1-z} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1+z}$$
On en tire que
$$a_n = \frac{1}{16} + \frac{1}{8}(n+1) - \frac{7}{8}(n+2)(n+1) + \frac{1}{4}(n+3)(n+2)(n+1) + \frac{1}{16}(-1)^n.$$
On réduit pour obtenir
$$a_n = \frac{4n^3+10n^2+4n-1+(-1)^n}{16}.$$