On définit un graphe *d-régulier* comme un graphe dont chaque sommet est de degré d, et en général un graphe *régulier* comme un graphe dont tous les sommets ont le même degré.

On rappelle que l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'énonce ainsi : pour tous vecteurs réels $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$, on a $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$.

Exercice 5.1. Soit $d \geq 3$. Montrer que la taille du plus petit cycle contenu dans un graphe d-régulier sur n sommets ne peut dépasser $c\log_{d-1}(n)$ pour une certaine constante c.

Solution 5.1. Soit v_0 un sommet de G. Considérons l'ensemble A de ses voisins à distance inférieure à i (on rappelle que la distance entre deux sommets d'un graphe est la longueur du plus court chemin entre ces deux sommets). S'ils sont tous différents, on a $|A| = 1+d+d(d-1)+\cdots+d(d-1)^{i-1}$. Par contre si $1+d+\cdots+d(d-1)^{i-1} \geq n$, au moins deux éléments de A sont égaux et il existe par conséquent un cycle de taille au plus $2i$. En effet, il existe alors un sommet w du graphe que l'on peut atteindre à partir de v_0 par deux chemins distincts de longueur i, mais alors quitte à partir du dernier sommet v commun aux deux chemins, on peut construire le cycle $v - w - v$ en utilisant d'abord le premier puis le second chemin.

Soit l le plus petit entier tel que $(d-1)^l \geq n$. Comme $1+d+\cdots+d(d-1)^{i-1} \geq (d-1)^i$, la taille du plus petit cycle de G est inférieure ou égale à $2l$. On en déduit que la taille du plus petit cycle est inférieure à $2\lceil\log_{d-1}(n)\rceil$.

Exercice 5.2. Soit G un graphe avec n sommets et m arêtes tel que $m > n^2/4$. Montrer que G contient un triangle (un cycle de longueur 3). (Indication : si (u,v) est une arête et que u, v n'ont pas de voisin commun, trouver une relation entre $\deg u$, $\deg v$ et n et sommer cette relation.)

Solution 5.2. On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que si $G = (V,E)$ n'a pas de triangle, il ne peut avoir trop d'arêtes. L'idée est de remarquer que pour deux sommets adjacents u et v, s'ils ne font pas partie d'un triangle, $\deg(u) + \deg(v) \leq n$, puisqu'il y a n sommets en tout et que chacun ne peut être relié qu'à l'un au plus d'entre u et v. En sommant cette relation sur toutes les arêtes, on obtient

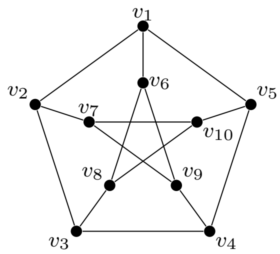
$$\sum_{(u,v)\in E} (\deg(u) + \deg(v)) \leq nm,$$

où m est le nombre d'arêtes. Par ailleurs, on a

$$\sum_{(u,v)\in E} (\deg(u) + \deg(v)) = \sum_{v\in V} \deg(v)^2.$$

En effet, en sommant sur les arêtes, un sommet v de V apparaît autant de fois que son degré. Comme sa contribution est de $\deg(v)$ par arêtes, on obtient le $\deg(v)^2$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (prendre $x_i = \deg(v_i)$ et $y_i = 1$) pour minorer la somme des carrés, on obtient $(2m)^2 = \left(\sum_{v\in V} \deg(v)\right)^2 \leq n\sum_{v\in V} (\deg(v))^2$ et on en déduit que $(2m)^2/n \leq nm$, ou encore que $m \leq n^2/4$.

Exercice 5.3. Montrer que le graphe de Petersen dessiné ci-dessous est isomorphe au graphe $G = (V,E)$ avec $V = \{A \subset \underline{5}, |A| = 2\}$ et $E = \{(A,B) \in V^2, A\cap B = \emptyset\}$.



Solution 5.3. Un exemple de bijection f entre les sommets des deux graphes qui respecte les règles d'adjacence est la suivante :

$$f(v_1) = \{0,1\}, f(v_2) = \{2,3\}, f(v_3) = \{1,4\}, f(v_4) = \{0,3\}, f(v_5) = \{2,4\},$$
$$f(v_6) = \{3,4\}, f(v_7) = \{0,4\}, f(v_8) = \{0,2\}, f(v_9) = \{1,2\}, f(v_{10}) = \{1,3\}.$$

Exercice 5.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe dans lequel tous les couples de sommets distincts ont soit zéro soit cinq voisins communs. Montrer que G est un graphe régulier. (Indice: choisir $(a, b) \in E$ et considérer l'ensemble A des voisins de a différents de b et l'ensemble B des voisins de b différents de a, puis compter le nombre d'arêtes entre les ensembles A et B).

Solution 5.4. L'idée est de compter l'ensemble C des arêtes (u, v) avec $u \in A$, $v \in B$ de deux manières. Pour tout $u \in A$, u et b ont comme voisin commun a, ils en ont donc exactement 4 autres par hypothèse. De plus, ces voisins sont nécessairement dans B, donc $|C| = 4|A|$. De même, en raisonnant sur les éléments v de B on trouve $|C| = 4|B|$. On en déduit $|A| = |B|$ et donc que tous les sommets adjacents sont nécessairement de même degré. Comme G est connexe, tous ses sommets sont de même degré et G est régulier.

Exercice 5.5. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le *graphe des arêtes* de G est le graphe

$$L(G) = (E, \{((a, b), (b, c)) \mid (a, b) \in E \text{ et } (b, c) \in E\}.$$

1. Si la somme des degrés des sommets de G est s, quel est le nombre de sommets de $L(G)$?
2. Supposons que $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\deg(v_i) = d_i$. Exprimer la somme des degrés de $L(G)$.
3. Pour quels graphes connexes G est-il isomorphe à $L(G)$? Justifier sa réponse.

Solution 5.5.

1. Le nombre de sommets de $L(G)$ est exactement le nombre d'arêtes de G. Or $2|E| = s$, on en déduit que le nombre de sommets de $L(G)$ est $s/2$.
2. Pour v_i un des n sommets de G, notons d_i son degré. Il est facile de voir qu'un tel sommet induit $\binom{d_i}{2} = \frac{d_i(d_i-1)}{2}$ arêtes dans $L(G)$, il s'agit des arêtes de $L(G)$ qui relient les arêtes adjacentes à v_i dans G. De plus, pour deux sommets différents de G, ces arêtes induites sont différentes. On en déduit que le nombre d'arêtes m de $L(G)$ vérifie
$$2m = \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1)\ .$$
La somme des degrés de $L(G)$ étant égale à 2 fois son nombre d'arêtes, on a fini.
3. Une condition nécessaire pour que deux graphes soient isomorphes est qu'ils aient le même nombre de sommets et la même somme des degrés, on obtient donc
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n = \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1)\ .$$

Ou encore

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 2n + \sum_{i=1}^{n} d_i = 4n\ .$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz (prendre $x_i = d_i$ et $y_i = 1$), on sait que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} d_i)^2/n = 4n$$

De plus, le cas d'égalité est atteint ssi le vecteur $(d_i)_{i\leq n}$ est proportionnel au vecteur (1), c'est-à-dire si tous les d_i sont égaux. De plus, pour que l'égalité $\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1)$ soit vérifiée, la valeur des d_i doit être 2. Finalement une condition nécessaire pour que G soit isomorphe à $L(G)$ est que tous ses sommets soient de degré 2. Pour G connexe, on en déduit qu'une condition nécessaire est qu'il soit un cycle. Réciproquement, un cycle est trivialement isomorphe à son graphe des arêtes, d'où le résultat.

Exercice 5.6. On rappelle qu'un *arbre* est un graphe connexe acyclique. On appelle *feuille* tout sommet de degré 1.

1. Montrer que tout arbre à plus de deux sommets possède au moins deux feuilles, et qu'il possède exactement deux feuilles si et seulement si c'est un chemin. (Indication: que vaut la somme des degrés de l'arbre?)
2. Soient G un graphe et v une feuille de G. Montrer que G est un arbre si et seulement si $G' = G \setminus \{v\}$ est un arbre.
3. Montrer qu'un graphe G est un arbre si et seulement si quels que soient les sommets distincts v et w de G il existe exactement un chemin reliant v et w.
4. Soit G un graphe à plus de deux sommets. Montrer que G est un arbre si et seulement si G n'est pas le graphe complet et ajouter à G une arête quelconque crée un seul cycle.

Solution 5.6.

1. Soient $v_1, \ldots, v_n$ les sommets de l'arbre. Puisque l'arbre a $n-1$ arêtes, on sait que

$$\sum_i \deg v_i = 2(n-1). \tag{1}$$

On note que tout sommet qui n'est pas une feuille est de degré au moins 2. Si l'arbre possédait au plus une feuille, on aurait

$$\sum_i \deg v_i \geq 1 + 2(n-1) > 2(n-1),$$

ce qui est une contradiction.

Un chemin est bien un arbre à exactement deux feuilles; il reste à prouver l'autre direction. Soit un arbre à exactement deux feuilles, c'est-à-dire deux sommets de degré 1, avec tous les autres sommets de degré au moins 2. Alors

$$\sum_i \deg v_i \geq 2 + 2(n-2) = 2(n-1).$$

Par l'équation (1), on a donc que tous les autres sommets sont exactement de degré 2.
Il reste à prouver qu'un graphe à n sommets avec deux sommets de degré 1 et $n-2$ sommets de degré 2 est bien un chemin. On peut facilement le prouver par induction sur n. Une autre preuve intuitive est la suivante: rajoutons une arête entre les deux feuilles: le graphe obtenu est connexe avec chaque sommet de degré 2, c'est donc un cycle. Le graphe original était donc bien un chemin.

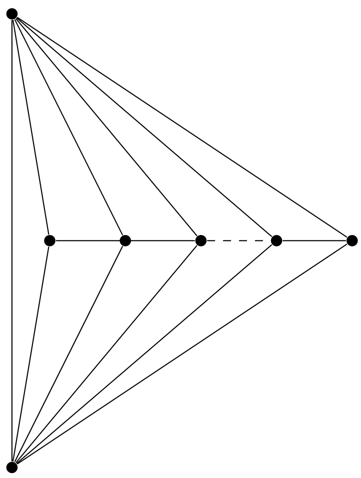
2. Si G est un arbre, G' est encore acyclique. Par ailleurs, si x et y appartiennent à G', ils sont reliés par un chemin dans G qui ne peut passer par v car v est de degré 1. Donc x et y sont encore reliés dans G'. Réciproquement, si G' est connexe, G est trivialement connexe également. D'autre part, ajouter v ne peut pas créer de cycle car v est de degré 1.

3. On raisonne par récurrence sur le nombre n de sommets. Le cas $n = 2$ est clair. Si G compte $n + 1 \geq 3$ sommets, on retire une feuille de G, ce qui est possible d'après la première question. Par hypothèse de récurence, il n'y a qu'un chemin dans G' entre deux sommets de G', de plus aucun nouveau chemin ne pourrait passer par v à cause de son degré égal à 1. D'autre part, un chemin partant de v passe forcément par la seul arête issue de v puis ne peut se prolonger que d'une seule manière.

4. Si G est un arbre, alors G n'est clairement pas le graphe complet. De plus en ajoutant l'arête disons (u, v), comme il n'y a qu'un unique chemin de u à v, on ne crée qu'un cycle supplémentaire. Réciproquement, on suppose que G n'est pas le graphe complet et que l'ajout de n'importe quelle arête crée exactement un cycle. Alors G est forcément connexe: en effet, s'il n'était pas connexe, il existerait $u, v \in G$ tels qu'il n'existe aucun chemin entre u et v dans G. Alors l'ajout de l'arête (u, v) ne créerait aucun cycle. On prouve également que G doit être acyclique. En effet, si G contient un cycle $v_0 - \cdots - v_\ell - v_0$ et qu'il existe v_i, v_j non reliés par une arête, l'ajout de l'arête (v_i, v_j) crée au moins deux cycles. Si tous les sommets du cycle sont reliés entre eux, alors il existe au moins un sommet $u \in G$ hors du cycle (puisque G n'est pas complet), relié à au moins un sommet v_i du cycle (puisque G est connexe). S'il existe v_j dans le cycle qui n'est pas voisin de u, l'ajout de l'arête (u, v_j) crée au moins deux cycles: $u - v_i - v_{i+1} - \cdots - v_j - u$ et $u - v_j - v_{j+1} - \cdots v_i - u$. Si tous les sommets hors du cycle sont reliés à tous les sommets du cycle, alors il existe au moins deux sommets u et v hors du cycle non reliés par une arête, sinon le graphe serait complet. L'ajout de l'arête (u, w) crée plus de deux cycles (au moins n triangles $u - v_i - w - u$).

Exercice 5.7. Montrer que pour tout $n \geq 2$ il existe un graphe planaire avec n sommets et $3n - 6$ arêtes.

Solution 5.7. On construit le graphe à n sommets suivant :



Il compte bien $2(n - 2) + (n - 3) + 1 = 3n - 6$ arêtes comme voulu.