

Exercice 6.1. Pour cet exercice, on définit la notion de "cycle non-simple", qui est un chemin $v_0 - \dots - v_n$ avec $v_n = v_0$, sans la contrainte que le chemin soit nécessairement simple.

Soit G un graphe 2-connexe, c'est-à-dire que G est connexe et que si on enlève n'importe quelle arête de G , le graphe résultant est encore connexe. Montrer que pour tout couple de sommets v_1, v_2 de G , il existe un cycle non-simple qui passe par v_1 et v_2 . (Indice: on pourra raisonner par récurrence sur la distance entre v_1 et v_2).

Solution 6.1. Si v_1 et v_2 sont à distance 1, il existe un chemin c entre v_1 et v_2 dans le graphe lorsqu'on retire l'arête (v_1, v_2) . On peut former le cycle c fermé par (v_2, v_1) . Supposons que v_1 et v_2 sont à distance $d > 1$ et que par tout couple de sommets à distance inférieure à $d - 1$ passe un cycle. Soit $v_1 - w_1 - w_2 - \dots - v_2$ un chemin de longueur d allant de v_1 à v_2 . Par hypothèse, il existe un cycle $C : w_1 = c_1 - \dots - v_2 - \dots - c_\ell = w_1$ passant par w_1 et v_2 . De plus il existe un chemin $v_1 = u_1 - u_2 - \dots - w_1$. Soit k le plus petit indice tel que u_k appartient à C , mettons $u_k = c_t$. Si u_k est différent de w_1 , on peut former le cycle (simple): $v_1 - u_2 - \dots - u_k - c_{t+1} - \dots - v_2 - \dots - w_1 - v_1$. Si $u_k = w_1$, on peut former le cycle non-simple $v_1 - u_2 - \dots - w_1 - c_2 - \dots - v_2 - \dots - w_1 - v_1$.

Exercice 6.2. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a pas d'autres polyèdres réguliers convexes que les 5 solides de Platon (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, isocaèdre). On remarque que le graphe de tels polyèdres est un graphe planaire tel que chacun des n sommets soit de même degré d et que chacune des f faces soit adjacente à k arêtes. En notant de plus m le nombre d'arêtes, établir l'équation suivante

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$$

et montrer que seulement 5 valeurs sont possibles pour (d, k, n, m, f) . Conclure.

Solution 6.2. On utilise toutes les relations qu'on connaît entre les divers paramètres:

1. $2|E| = \sum d_i$ donc $2m = nd$.
2. Toutes les faces sont adjacentes à k arêtes, donc $2m = fk$.
3. Enfin, d'après la formule d'Euler, $n - m + f = 2$

On utilise (1) et (2) pour remplacer n et f dans 3:

$$\frac{2m}{d} - m + \frac{2m}{k} = 2$$

ce qui donne en divisant par $2m$:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}.$$

Pour les polyèdres réguliers convexes, on sait que $k > 2$ et $d > 2$, sinon on obtient des cas dégénérés. Comme m est un entier on doit donc nécessairement avoir $\min(d, k) = 3$. En effet, dans le cas contraire, le membre de gauche serait majoré par $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ alors que le membre de droite est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. On en déduit pour $d = 3$ que $k \in \{3, 4, 5\}$ avec respectivement $m \in \{6, 12, 30\}$. En effet, si $k \geq 6$, le membre de gauche serait majoré par $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ alors que le membre de droite est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. Et de même pour $k = 3$ on doit avoir $d \in \{3, 4, 5\}$ avec les mêmes m . On ne peut donc avoir plus de 5 polyèdres réguliers convexes. On peut identifier les 5 polyèdre de Platon :

1. Tétraèdre : $(d, k, m) = (3, 3, 6)$.
2. Cube : $(d, k, m) = (3, 4, 12)$.
3. Octaèdre : $(d, k, m) = (4, 3, 12)$.
4. Dodécaèdre : $(d, k, m) = (3, 5, 30)$.

5. Isocaèdre : $(d, k, m) = (5, 3, 30)$.

Exercice 6.3. Soit G un graphe planaire tel que tout sommet soit de degré pair. Montrer que la carte induite par les faces d'un dessin de G dans le plan est 2-coloriable. (Indice: on pourra faire une récurrence sur le nombre d'arêtes de G).

Solution 6.3. On raisonne par récurrence sur le nombre m d'arêtes du graphe. Pour $m = 0$, il y a qu'une face infinie et la carte induite est trivialement 2-coloriable (elle est même 1-coloriable). Supposons maintenant que l'affirmation soit vraie pour tout $i < m$ et prenons une représentation planaire d'un graphe avec m arêtes dont tous les degrés sont pairs. On choisit une face f de ce graphe et on enlève toutes les arêtes de son bord pour obtenir un graphe G' .

On peut remarquer que la face f de G est strictement incluse dans une face f' de G' ; f' est la réunion de f et des faces contigües de f . De plus, tous les degrés de G' sont encore pairs, car on a juste diminué le degré de certains sommets de 2. Par hypothèse de récurrence la carte qu'il induit est 2-coloriable. On colorie alors la face f de la couleur opposée à celle de f' , les faces contigües restant de la même couleur. Ce nouveau coloriage est bien un 2 coloriage. Il est par ailleurs admissible. En effet, prenons une arête quelconque de G . Soit elle appartient à f , alors elle est intérieure à f' . Or on a changé la couleur de f par rapport à celle de f' . Soit cette arête appartient à G' et par hypothèse de récurrence, les couleurs des faces de part et d'autre sont distinctes.

Exercice 6.4. Montrer qu'un graphe G a au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes (où $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de G).

Solution 6.4. On peut observer que si c est un coloriage du graphe G avec $\chi(G)$ couleurs, alors pour chaque couple de couleurs utilisées c_1 et c_2 , il existe une arête reliant un sommet de couleur c_1 à un sommet de couleur c_2 . En effet, si tel n'était pas le cas, en prenant une seule et même couleur à la place de c_1 et c_2 , on obtiendrait encore un coloriage avec $\chi(G) - 1$ couleurs, ce qui est absurde. Ainsi le graphe contient au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes.

Exercice 6.5. Répondez aux questions suivantes :

1. Quelle est la série génératrice de la suite $1, 1, 1, \dots$?
2. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^2}$?
3. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^3}$?
4. Utiliser les questions précédentes pour trouver la série génératrice des carrés : $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$

Solution 6.5.

1. On vérifie que formellement $(1-z)(1+\dots+z^n+\dots) = 1$. La série génératrice est $1 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$.

2. En posant $A = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$ et en appliquant l'opérateur de dérivation formelle ∂ , on obtient

$$\partial(A) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

La suite associée est la suite des entiers strictement positifs.

3. Dérivons une seconde fois, $\partial\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) = \frac{2}{(1-z)^3}$. Ainsi

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+2}{2} z^n$$

La suite est donc $\left(\binom{n+2}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. On décompose la série comme suit

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)^2 z^n = \sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2)z^n - \sum_{n \geq 0} (n+1)z^n$$

D'après la question 3, le premier terme vaut $\frac{2}{(1-z)^3}$ et d'après la question 2, le second terme vaut $\frac{1}{(1-z)^2}$. Donc

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)^2 z^n = \frac{2}{(1-z)^3} + \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{(1-z)^3}.$$

Exercice 6.6. On définit les notions suivantes :

- La **distance de Hamming** $d_H(x, y)$ entre deux vecteurs binaires $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ est le nombre de positions où les deux vecteurs diffèrent : $d_H(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$.
- Le **pois de Hamming** $\text{wgt}_H(x)$ d'un vecteur x est le nombre de ses coordonnées non nulles, c'est-à-dire $d_H(x, 0)$, avec 0 le vecteur tout à zéro.
- Le graphe de l'**hypercube** ou simplement l'**hypercube** \mathcal{H}_n est le graphe $G = (\{0, 1\}^n, E)$ avec $E = \{(x, y) \mid d_H(x, y) = 1\}$.

Répondre aux questions suivantes.

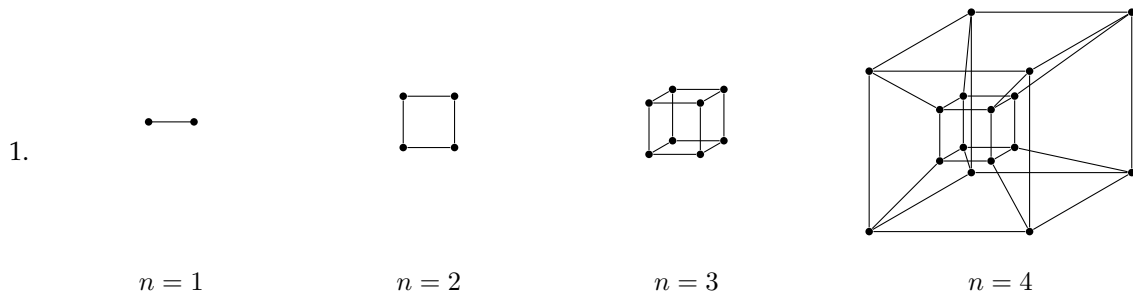
1. Quels sont les hypercubes pour $n = 1, 2, 3, 4$?
2. Pour $x, y \in \{0, 1\}^n$, prouver que

$$\text{wgt}_H(x + y) = \text{wgt}_H(x) + \text{wgt}_H(y) - 2\text{wgt}_H(xy),$$

avec $x + y$ la somme binaire terme à terme de x et y , et xy le produit terme à terme de x et y .

3. Prouver que $\chi(\mathcal{H}_n) = 2$ [indication: colorier les vecteurs x en fonction de leur poids].
4. En déduire que $\omega(\mathcal{H}_n) = 2$.
5. Exhiber un ensemble indépendant de \mathcal{H}_n de taille 2^{n-1} .
6. Prouver que $\alpha(\mathcal{H}_n) = 2^{n-1}$ [indication: pour un ensemble indépendant S , considérer son intersection S_0 avec l'ensemble des vecteurs de poids pair, et son intersection S_1 avec l'ensemble des mots de poids impair. Pour borner $|S_0| + |S_1|$, établir une bijection entre S_0 et un sous-ensemble (à déterminer) de l'ensemble des vecteurs de poids impair].
7. En déduire que $\theta(\mathcal{H}_n) = 2^{n-1}$.
8. Prouver que \mathcal{H}_n admet un cycle hamiltonien pour $n \geq 2$. Un cycle hamiltonien de \mathcal{H}_n est appelé un **code de Gray** de longueur n .
9. Quels sont les codes de Gray pour $n = 2, 3, 4$?

Solution 6.6.



2. Il suffit de montrer l'affirmation pour $n = 1$, car la fonction poids est additive sur les coordonnées. Une inspection de toutes les valeurs possibles pour x et y nous donne alors le résultat.
3. Soit f l'application de $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ qui associe 0 à tous les x de poids pair, et 1 à tous les x de poids impair. Pour montrer qu'il s'agit d'un coloriage valide de l'hypercube, il suffit de montrer que tous les vecteurs de poids pair (impair) ne sont pas connectés les uns aux autres dans \mathcal{H}_n . Les voisins de $x \in \{0, 1\}^n$ sont les vecteurs $x + e_i$, $i = 1, \dots, n$, avec e_i égal à 1 en une seule coordonnée i . Ainsi, par la question 1, $\text{wgt}_H(x + e_i) \equiv \text{wgt}_H(x) + 1 \pmod 2$, ce qui montre que la parité du poids de x est différente de celles de tous ses voisins. Cela montre que $\chi(\mathcal{H}_n) = 2$.
4. Comme \mathcal{H}_n a des cliques de taille 2 (chaque arête), on a aussi $\omega(\mathcal{H}_n) \geq 2$. En utilisant l'inégalité $\chi(\mathcal{H}) \geq \omega(\mathcal{H})$ vue dans le cours, on obtient $\omega(\mathcal{H}) = \chi(\mathcal{H}) = 2$.
5. D'après la question 1, on sait que les vecteurs de poids pair ne sont pas connectés ensemble, ils forment donc un ensemble indépendant. Leur nombre est $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}$. Pour voir cette dernière égalité, il suffit de remarquer que $0 = (1 - 1)^n = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = \sum \binom{n}{2i} - \sum \binom{n}{2i+1}$, d'où $\sum \binom{n}{2i} = \sum \binom{n}{2i+1} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.
6. Si S est un ensemble indépendant, soit S_0 l'intersection de S avec l'ensemble des mots de poids pair et S_1 son intersection avec les mots de poids impair. On a $|S_0| + |S_1| = |S|$. Comme S est indépendant, $S_0 + e_1$ est d'intersection vide avec S_1 , où $S_0 + e_1 = \{x + e_1 \mid x \in S_0\}$.
Ainsi, $|S_1| \leq 2^{n-1} - |S_0 + e_1| = 2^{n-1} - |S_0|$, et donc $|S| \leq 2^{n-1}$. Cela montre que $\alpha(\mathcal{H}_n) = 2^{n-1}$.
7. D'une part, on peut partitionner \mathcal{H}_n en 2^{n-1} 2-cliques de la forme $\{x, x + e_1\}$ où x décrit tous les vecteurs de poids pair, d'où $\theta(\mathcal{H}_n) \leq 2^{n-1}$. D'autre part, on sait par un théorème du cours que $\theta(\mathcal{H}_n) \geq \alpha(\mathcal{H}_n)$. On en déduit que $\theta(\mathcal{H}_n) = 2^{n-1}$.
8. On prouve l'assertion par récurrence sur n . Si $n = 2$, alors il existe bien un cycle hamiltonien. Supposons que $n > 2$. Alors \mathcal{H}_{n-1} a un cycle hamiltonien, disons

$$v_1 - v_2 - \dots - v_{2^{n-1}} - v_1,$$

avec $\{v_1, \dots, v_{2^{n-1}}\} = \{0, 1\}^{n-1}$. De là, on construit un cycle hamiltonien pour \mathcal{H}_n de la façon suivante. Pour $v \in \{0, 1\}^{n-1}$ on note $(1 \mid v)$ le vecteur qui a pour première coordonnée 1 et pour les restantes les mêmes que v . De manière similaire, on définit $(0 \mid v)$. Alors, le cycle suivant est un cycle hamiltonien de \mathcal{H}_n :

$$(0 \mid v_1) - (0 \mid v_2) - \dots - (0 \mid v_{2^{n-1}}) - (1 \mid v_{2^{n-1}}) - (1 \mid v_{2^{n-1}-1}) - \dots - (1 \mid v_2) - (1 \mid v_1) - (0 \mid v_1).$$

9. Pour $n = 2$ on a

$$(00), (01), (11), (10).$$

Pour $n = 3$ on a

(000), (001), (011), (010), (110), (111), (101), (100) .

Pour $n = 4$ on a

(0000), (0001), (0011), (0010), (0110), (0111), (0101), (0100),
(1100), (1101), (1111), (1110), (1010), (1011), (1001), (1000) .