

**Exercice 7.1.** Calculer la série génératrice, puis déduire une forme close des suites suivantes :

1.  $a_0 = 1$  et  $a_{n+1} = 2a_n + 1$ .
2.  $a_0 = 1$  et  $a_{n+1} = a_n + 2^n$ .

**Solution 7.1.**

1. Introduisons la série  $A = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . La relation  $\forall n \geq 0, a_{n+1} - 2a_n - 1 = 0$  peut s'écrire

$$\sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^{n+1} - 2 \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} x^{n+1} = 0.$$

On reconnaît alors les termes suivants :  $A - a_0$ ,  $2xA$  et  $\frac{x}{1-x}$ . Il s'ensuit que

$$(1 - 2x)A - \frac{1}{1-x} = 0.$$

D'où l'on tire

$$A = \frac{1}{(1-2x)(1-x)} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} 2^{n+1} x^n - \sum_{n \geq 0} x^n.$$

Ainsi  $a_n = 2^{n+1} - 1$ .

2. Introduisons la série  $A = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . La relation  $\forall n \geq 0, a_{n+1} - a_n - 2^n = 0$  peut s'écrire

$$\sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} 2^n x^{n+1} = 0.$$

On reconnaît les termes suivants :  $A - a_0$ ,  $xA$  et  $\frac{x}{1-2x}$ . Il s'ensuit que

$$(1 - x)A - \frac{1-x}{1-2x} = 0.$$

D'où l'on tire

$$A = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n \geq 0} 2^n x^n.$$

Ainsi  $a_n = 2^n$  pour tout  $n$ .

**Exercice 7.2.** Les nombres de Pell  $P_n$  sont définis par  $P_0 = 0$ ,  $P_1 = 1$  et  $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ .

1. Trouver la série génératrice des nombres de Pell.
2. En déduire une formule close pour ces nombres.
3. Quelle est la limite de  $P_{n+1}/P_n$  ?
4. Les nombres de Pell font leur apparition très tôt dans les mathématiques et permettent en particulier de construire des approximations rationnelles de  $\sqrt{2}$ , c'est-à-dire d'approcher  $\sqrt{2}$  par des fractions de la forme  $p/q$  avec  $p$  et  $q$  entiers. En utilisant la question 3, voyez-vous comment?

**Solution 7.2.**

1. Soit  $P = \sum_{n \geq 0} P_n x^n$  la série génératrice des nombres de Pell. On a par hypothèse

$$\sum_{n \geq 2} P_n x^n - 2 \sum_{n \geq 2} P_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 2} P_{n-2} x^n = 0.$$

On reconnaît les termes suivants :  $P - P_0 - P_1 x$ ,  $x(P - P_0)$  et  $x^2 P$ , ce qui conduit à l'équation

$$P - x - 2xP - x^2 P = 0.$$

La série génératrice est donc

$$P = \frac{x}{1 - 2x - x^2}.$$

2. En utilisant la proposition 4.4(2) du cours, on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} P_n x^n &= \frac{x}{1 - 2x - x^2} \\ &= \frac{x}{(1 - (1 + \sqrt{2})x)(1 - (1 - \sqrt{2})x)} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 - (1 + \sqrt{2})x} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 - (1 - \sqrt{2})x} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 + \sqrt{2})^n - \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - \sqrt{2})^n \right) x^n. \end{aligned}$$

D'où,  $P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} ((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n)$  pour tout  $n \geq 0$ .

3. On a

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n} = \frac{1 - \left( \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^{n+1}}{\frac{1}{1 + \sqrt{2}} - \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \left( \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^{n+1}}.$$

Comme  $|(1 - \sqrt{2})/(1 + \sqrt{2})| < 1$ , il s'ensuit que  $P_{n+1}/P_n \rightarrow 1 + \sqrt{2}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

4. Comme  $(P_{n+1} - P_n)/P_n \rightarrow \sqrt{2}$  quand  $n \rightarrow \infty$ , on dispose d'un algorithme rapide pour approximer  $\sqrt{2}$  par des fractions : on calcule les valeurs de  $P_n$  ; il ne reste qu'à appliquer la

formule ci-dessus. Voici ci-dessous les valeurs des fractions et leur distance à  $\sqrt{2}$ :

$n$	$P_n$	$(P_n - P_{n-1})/P_{n-1}$	$(P_n - P_{n-1})/P_{n-1} - \sqrt{2}$
2	2	1	-0.4142135623
3	5	$\frac{3}{2}$	0.0857864376
4	12	$\frac{7}{5}$	-0.0142135623
5	29	$\frac{17}{12}$	0.0024531042
6	70	$\frac{41}{29}$	-0.0004204589
7	169	$\frac{99}{70}$	0.0000721519
8	408	$\frac{239}{169}$	-0.0000123789
9	985	$\frac{577}{408}$	0.0000021239
10	2378	$\frac{1393}{985}$	-0.0000003644
11	5741	$\frac{3363}{2378}$	0.0000000625
12	13860	$\frac{8119}{5741}$	-0.0000000107
13	33461	$\frac{19601}{13860}$	0.0000000018
14	80782	$\frac{47321}{33461}$	-0.0000000003
15	195025	$\frac{114243}{80782}$	$5.4178 \times 10^{-11}$
16	470832	$\frac{275807}{195025}$	$-9.2955 \times 10^{-12}$
17	1136689	$\frac{665857}{470832}$	$1.5950 \times 10^{-12}$
18	2744210	$\frac{1607521}{1136689}$	$-2.7364 \times 10^{-13}$
19	6625109	$\frac{3880899}{2744210}$	$4.6948 \times 10^{-14}$

**Exercice 7.3.** Soit  $n$  un entier et soit  $S_n$  le nombre de vecteurs  $(s_1, \dots, s_k) \in \{1, 2, 3\}^k$  tels que  $\sum_i s_i = n$  et  $k \geq 1$  entier. Par exemple,  $S_0 = 0$ ,  $S_1 = 1$ ,  $S_2 = 2$ ,  $S_3 = 4$  et  $S_4 = 7$ .

1. Trouver une récurrence pour  $S_n$  qui fait intervenir  $S_{n-1}$ ,  $S_{n-2}$  et  $S_{n-3}$ .
2. Exprimer la série génératrice  $S(x)$  de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sous forme d'une fraction rationnelle.

On peut montrer (voir corrigé) qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $S_n/\theta^n$  converge vers un nombre réel non nul quand  $n$  tend vers l'infini.

**Solution 7.3.**

1. Soit  $\Sigma_n := \{(s_1, \dots, s_k) \mid \sum_{i=1}^k s_i = n, s_i \in \{1, 2, 3\}\}$ , on a alors  $S_n = |\Sigma_n|$ . Pour  $\ell = 1, 2, 3$  soit  $\Sigma_{n,\ell} := \{(s_1, \dots, s_k) \mid \sum_i s_i = n, s_i \in \{1, 2, 3\}, s_k = \ell\}$  et donc  $\Sigma_n = \sqcup_{\ell=1}^3 \Sigma_{n,\ell}$ . On remarque que  $|\Sigma_{n,\ell}| = S_{n-\ell}$ , ainsi

$$S_{n+3} = S_{n+2} + S_{n+1} + S_n$$

pour  $n \geq 1$ .

2. Considérons la série génératrice  $S(x)$  associée à  $S_n$ . La formule de récurrence  $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$  pour  $n \geq 3$  se traduit en une équation sur la série génératrice :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 3} S_n x^n - \sum_{n \geq 3} S_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 3} S_{n-2} x^n - \sum_{n \geq 3} S_{n-3} x^n &= 0 \\ S(x) - x - 2x^2 - x(S(x) - x) - x^2 S(x) - x^3 S(x) &= 0 \\ S(x) &= \frac{x + 3x^2}{1 - x - x^2 - x^3}. \end{aligned}$$

La valeur exacte ainsi que le comportement asymptotique de  $S_n$  peut se déduire de la décomposition en éléments simples de  $S(x)$ . Cherchons d'abord les racines de  $1 - x - x^2 - x^3$ . Il est facile de voir que cette fonction est strictement décroissante, de plus elle est positive en 0 et négative en 1, elle admet donc une seule racine réelle  $r$ . En utilisant la calculatrice, on peut obtenir un valeur approché de  $r$ , 0.543. On peut alors écrire  $1 - x - x^2 - x^3 = -(x - r)(x^2 + bx + c)$ . En identifiant les termes on trouve  $c = 1/r$  et  $b = 1 + r$ . En posant  $\Delta = b^2 - 4ac$ , les deux racines complexes conjuguées  $w$  et  $\bar{w}$  de  $1 - x - x^2 - x^3$  s'écrivent  $(-b \pm \sqrt{\Delta})/2$  et, ce qui est plus important, sont de module  $\sqrt{(b^2 + \Delta)/4} = 1/\sqrt{r}$ . Finalement, on peut écrire

$$S(x) = \frac{A}{1 - x/r} + \frac{B}{1 - x/w} + \frac{C}{1 - x/\bar{w}}$$

avec  $A$  réel et  $B, C$  complexes et conjugués. Ce qui donne

$$S_n = A(1/r)^n + B(1/w)^n + \bar{B}(1/\bar{w})^n.$$

De plus,  $A$  est non nul car sinon comme  $|1/w| < 1$ ,  $S(x)$  tendrait vers 0 ce qui n'est clairement pas le cas. On en déduit que  $S_n$  se comporte comme  $A/r^n$  et avec  $\theta = 1/r$  on montre que la limite de l'énoncé existe et vaut  $A$ .

**Exercice 7.4.**

1. Montrer que si  $x_1, \dots, x_n$  sont des nombres réels positifs, alors  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3 \geq (\sum_i x_i/n)^3$ .
2. Soit  $G = (V, E)$  un graphe sur  $n$  sommets qui ne contient pas  $K_{3,3}$  comme sous-graphe. On définit la matrice dont les lignes sont indexées par les sous-ensembles de  $V$  de cardinal 3, et les colonnes par les éléments de  $V$ . A la ligne  $\{v_1, v_2, v_3\}$  et la colonne  $u$ , on inscrit la valeur 1 dans la matrice si  $u$  est connecté à  $v_1, v_2$  et  $v_3$ , sinon on y inscrit 0. Compter de deux manières différentes le nombre de 1 de cette matrice. En déduire qu'il existe une constante  $c$  telle que  $G$  a au plus  $cn^{5/3}$  arêtes.

**Solution 7.4.**

1. Le premier point provient de la convexité de  $x \mapsto x^3$  dont on peut s'assurer en vérifiant que la dérivée seconde est positive. Rappelons qu'une fonction est convexe ssi pour tous  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , on a  $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ .

2. Notons  $V$  l'ensemble des arêtes de  $G$ . Considérons une matrice avec  $\binom{n}{3}$  lignes et  $n$  colonnes dans lesquelles les lignes sont indexées par des sous-ensembles de cardinal 3 de  $V$  et les colonnes par des éléments de  $V$ . Dans la ligne  $\{v_1, v_2, v_3\}$  et la colonne  $u$ , inscrivons la valeur 1 dans la matrice si  $u$  est connecté à  $v_1, v_2$  et  $v_3$ ; sinon mettons-y un 0. A présent calculons le nombre  $M$  de 1 dans cette matrice. Chaque ligne de cette matrice ne peut avoir qu'au plus 2 uns, puisque le graphe ne contient pas  $K_{3,3}$ , donc  $M \leq 2\binom{n}{3}$ . D'autre part, la colonne correspondant à  $u \in V$  possède  $\binom{\deg(u)}{3}$  uns, le nombre d'ensembles  $u$  à trois éléments qui lui sont reliés. Soient  $d_1, \dots, d_n$  les degrés des sommets de  $V$ . On a alors

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{3} = M \leq 2\binom{n}{3}.$$

En majorant  $\binom{n}{3}$  par  $n^3/6$  et en minorant  $\binom{d_i}{3}$  par  $(d_i - 2)^3/6$ , ceci montre que

$$\sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3 \leq 2n^3.$$

Mais en développant le terme à gauche, on obtient

$$\sum_{i=1}^n d_i^3 \leq 2n^3 + 6 \sum_i d_i^2 - 12 \sum_i d_i + 8.$$

Or  $\sum_i d_i^2$  est majoré par  $n(n-1)^2$  puisque  $d_i \leq n-1$ . On a donc pour une constante  $c$  assez grande,

$$\sum_{i=1}^n d_i^3 \leq cn^3$$

Utilisons à présent la première question. On obtient  $\sum_{i=1}^n d_i^3 \geq n \left(\frac{s}{n}\right)^3$  avec  $s = \sum_i d_i$  ou encore  $s = 2m$  où  $m$  est le nombre d'arêtes dans  $G$ . Ainsi,  $8m^3/n^2 \leq cn^3$  et finalement  $m \leq (c/8)^{1/3} n^{5/3}$ .