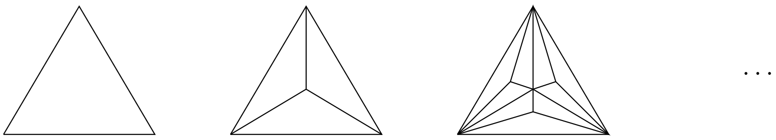
Exercice 6.1. On se propose de démontrer qu'il existe une infinité de graphes avec e et v tendant vers l'infini satisfaisant $e = \frac{g}{g-2}(v-2)$. On considère la suite de graphes suivante :



G_0 G_1 G_2

G_0 est un triangle, et chaque graphe G_i est obtenu du précédent en ajoutant un sommet au centre de chaque face (sauf la face extérieure) et en ajoutant des arêtes reliant ce sommet à chacun des trois sommets de la face qui le contient.

Soit v_n le nombre de sommets de G_n, e_n son nombre d'arêtes et t_n le nombre de faces qu'il contient (sauf la face extérieure). Trouver des formules closes pour t_n, v_n et e_n, et conclure.

Exercice 6.2. On rappelle qu'un *arbre* est un graphe connexe acyclique. On appelle *feuille* tout sommet de degré 1.

1. Montrer que tout arbre à plus de deux sommets possède au moins deux feuilles, et qu'il possède exactement deux feuilles si et seulement si c'est un chemin. (Indication : que vaut la somme des degrés de l'arbre ?)
2. Soient G un graphe et v une feuille de G. Soit G' le graphe obtenu en enlevant de G la feuille v et l'unique arête qui la touche. Montrer que G est un arbre si et seulement si G' est un arbre.
3. Montrer qu'un graphe G est un arbre si et seulement si quels que soient les sommets distincts v et w de G il existe exactement un chemin reliant v et w.
4. Soit G un graphe à plus de deux sommets. Montrer que G est un arbre si et seulement si G n'est pas le graphe complet et ajouter à G une arête quelconque crée un seul cycle.

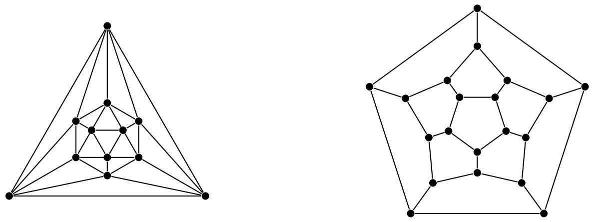
Exercice 6.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire, sans pont et de circonférence $g \geq 4$. Montrer que $|E| \leq 2|V| - 4$.

Exercice 6.4.

1. Donner une borne inférieure n_d sur le nombre de sommets d'un graphe G de circonférence 5 dont le degré de tout sommet est supérieur à d. Dessiner un tel graphe G à exactement n_d sommets pour $d = 2$ et $d = 3$.
2. Même question si G est de circonférence 4.

Exercice 6.5. Soit G un graphe planaire tel que tout sommet soit de degré pair. Montrer qu'on peut colorier les faces de G avec 2 couleurs de telle sorte que deux faces partageant une arête soient de couleurs différentes. (Indice : faire une récurrence sur le nombre d'arêtes de G).

Exercice 6.6. Trouver le nombre chromatique de l'icosaèdre (gauche) et du dodécaèdre (droite).



Exercice 6.7. Montrer qu'un graphe G a au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes (où $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de G).