ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 2 24 Mars 2006

1. Induction

a) Prouver par induction que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \geq -1$, on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

b) Prouver par induction que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

2. Induction

Soit $P(n)$ la propriété suivante:

"Dans une classe de n élèves, s'il y a au moins une fille alors tous les élèves sont des filles."

Quelle est l'erreur dans le raisonnement suivant?

> Nous allons "montrer" par induction sur n que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.
>
> **Base:** $n = 1$. Dans une classe de 1 élève, clairement s'il y a au moins une fille alors elle sera la seule personne dans la classe, il est donc vrai que tous les élèves sont des filles.
>
> **Pas:** Supposons que $P(n)$ est vraie. Nous voulons en déduire que $P(n+1)$ est vraie. Supposons que nous avons une classe C de $n+1$ élèves, dans laquelle il y a au moins une fille $f \in C$. Prenons à présent un élève $e_1 \neq f$ dans cette classe, donc $e_1 \in C$. Enlevons cet élève pour obtenir une classe $C_1 = C \backslash \{e_1\}$ de n élèves, qui contient au moins une fille (puisque $f \in C_1$). Puisque $P(n)$ est vraie, on en déduit qu'il n'y a que des filles dans C_1. Donc tous les élèves dans C, sauf e_1 sont des filles.
> Il reste donc à montrer que e_1 est une fille. On prend maintenant un autre élève e_2 avec $e_2 \neq f$ et $e_2 \neq e_1$, et on fait le même raisonnement que ci-dessus pour déduire que tous les élèves dans $C_2 = C \backslash \{e_2\}$ sont des filles. Puisque $e_1 \in C_2$, e_1 est aussi une fille et donc tous les élèves dans C sont des filles.

3. La notation O

Rappelle la notation O.

a) Montrer que $n^2 + 100 = O(n^2)$, c'est à dire trouver des éléments c et n_0 satisfaisant la définition. Montrer maintenant que $n^2 + 100 = \Theta(n^2)$.

b) Supposons que $f(n) = O(g(n))$ et $g(n) = O(h(n))$. Montrer que $f(n) = O(h(n))$.

c) Montrer que $n = \Omega(\log_2(n))$.

d) Supposons que $f(n) = O(g(n))$. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ on a $a \cdot f(n) = O(b \cdot g(n))$

e) Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$, on a $n^d = O(a^n)$.

f) Remplir le tableau suivant par vrai ou faux.

$f(n)$	$g(n)$	$f(n) = O(g(n))$	$f(n) = \Omega(g(n))$	$f(n) = \Theta(g(n))$	$f(n) = o(g(n))$
$n^{1/100}$	$\sqrt{n}$				
$\ln(n)$	$\ln^2(n)$				
$\sqrt{n}$	$\ln^2(n)$				
2^n	$n!$				
$\log_2(n)$	$\log_3(n)$				
$\ln(n)$	$\ln\ln(n)$				
$2^{\ln(n)}$	n^2				
2^n	$n^{\ln\ln(n)}$				
$2^{\sqrt{\ln(n)}}$	$\sqrt{n}$				

4.L'Algorithme de Karatsuba

a) Soient $f(x) = a + b \cdot x$ et $g(x) = \alpha + \beta \cdot x$ deux polynômes de degré 1 sur $\mathbb{R}$. Utiliser l'algorithme de Karatsuba pour multiplier $f(x)$ et $g(x)$. De combien de multiplications d'éléments de $\mathbb{R}$ a-t-on besoin?

b) Soient $f(x) = 1+2x+x^2+2x^3$ et $g(x) = 2+2x+x^2+x^3$ deux polynômes de degré 3 sur $\mathbb{R}$. En utilisant l'algorithme naïf pour multiplier $f(x)$ et $g(x)$, de combien de multiplications d'éléments de $\mathbb{R}$ a-t-on besoin?

c) Considérons maintenant l'algorithme de Karatsuba pour $f(x)$ et $g(x)$ dans la question précédente. Que valent f_0, f_1, g_0, g_1? Que valent u et v?

d) Utiliser l'algorithme de Karatsuba pour effectuer la multiplication, et compter le nombre de multiplications sur $\mathbb{R}$ qui sont nécessaires.

e) On veut multiplier deux polynômes de degré deux, $f(x) = f_2x^2 + f_1x + f_0$ et $g(x) = g_2x^2+g_1x+g_0$, en effectuant le moins de multiplications possibles. Spécialisez l'algorithme de Karatsuba à ce cas et modifiez-le pour qu'il n'effectue que 6 multiplications.

5.Elever une matrice au carré

Soit A la matrice 2×2 sur $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) Trouver un algorithme qui calcule A^2 en utilisant 5 multiplications d'éléments de $\mathbb{R}$ (et autant d'additions d'éléments de $\mathbb{R}$ que nécessaire).

b) Peut-on généraliser cet algorithme récursivement à toute matrice $n \times n$ pour obtenir un algorithme $O(n^{\log_2(5)})$ (comme nous l'avons fait dans le cours pour l'algorithme de Strassen)? Pourquoi?