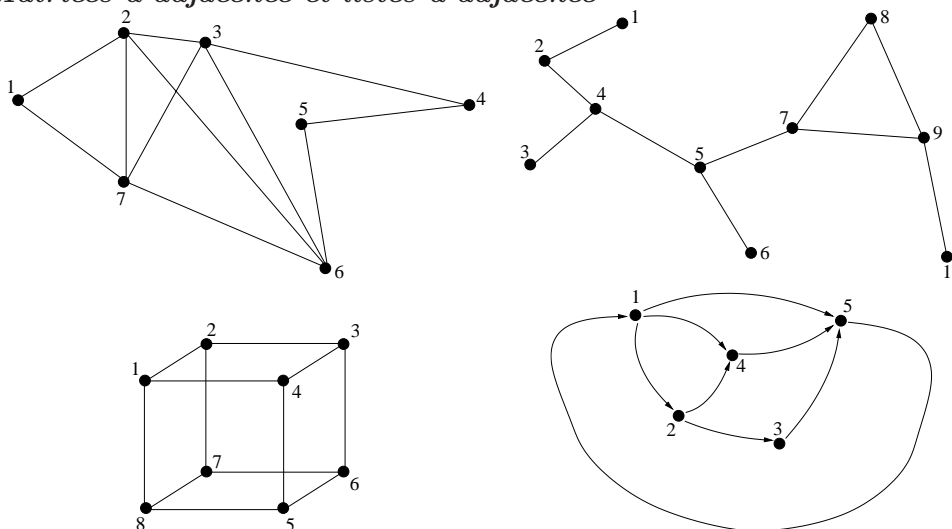


**ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE**  
 Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

**1. Matrices d'adjacence et listes d'adjacence**



- a) Pour chaque graphe ci-dessus, donnez la matrice d'adjacence et les listes d'adjacence.
- b) Donner une interprétation de la somme des éléments d'une ligne de la matrice d'adjacence d'un graphe.
- c) Pour un graphe de la partie a) ci-dessus, élever sa matrice d'adjacence  $A$  au carré.  
 Quelle est la relation entre la  $(i, j)$ -ème composante de  $A^2$  et le nombre de chemins de longueur 2 entre les sommets  $i$  et  $j$ ? Justifier votre réponse.

**2. Graphes**

- a) Si la première ligne de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté  $G$  ne contient que des 1 alors  $G$  est connexe. Vrai ou Faux? (Justifier.)
- b) Dessiner un arbre binaire dans lequel tous les sommets ont degré 0 ou 2, mais qui n'est pas un arbre AVL.
- c) Soit  $T$  un arbre binaire avec  $n$  sommets. Quelle est la plus petite hauteur que peut avoir  $T$ ? Quel est la plus grande hauteur que peut avoir  $T$ ?
- d) Soit  $G$  un graphe non orienté avec  $n$  sommets, et dans lequel tous les sommets ont degré  $d$  (un tel graphe est appelé  $d$ -régulier). Nous supposons aussi que la diagonale de sa matrice d'adjacence ne contient que des 0.  
 Montrer que si  $n$  est impair alors  $d$  doit être pair. (*Indice*: compter le nombre d'arêtes.)

### 3. Arbres AVL

Ajouter les éléments suivants (dans l'ordre donné) dans un arbre AVL (initialement vide) de telle façon qu'il reste AVL:

12, 9, 123, 3, 0, 23, 98, 2, 11, 7

Dessiner l'arbre après chaque insertion.

### 4. Hashing

Nous aimerions stocker des noms dans un tableau de hachage de taille 26. Pour le faire nous identifions les lettres de l'alphabet avec des nombres:  $A = 0, B = 1, \dots, Z = 25$ . Nous avons le choix entre deux fonctions de hachage:

$$\begin{aligned}
 h_1 : \{A, \dots, Z\}^+ &\rightarrow \{0, \dots, 25\} \\
 (a_1, \dots, a_n) &\mapsto a_1 \\
 \text{et } h_2 : \{A, \dots, Z\}^+ &\rightarrow \{0, \dots, 25\} \\
 (a_1, \dots, a_n) &\mapsto a_1 + a_3 \pmod{26}.
 \end{aligned}$$

(Nous supposons que les noms sont assez longs pour que  $h_2$  soit défini.)

Voici la liste des noms à traiter avec les valeurs des fonctions  $h_1$  et  $h_2$  correspondantes:

Nom	$h_1$	$h_2$	Nom	$h_1$	$h_2$
Alfio	0	5	Jean-Marie	9	9
Amel	0	4	Joachim	9	9
Amin	0	8	John	9	16
Anthony	0	19	Jose	9	1
Antoine	0	19	Klaus-Dieter	10	10
Bernard	1	18	Manuel	12	25
Boris	1	18	Marco	12	3
Charles	2	2	Michel	12	14
Denis	3	16	Otto	14	7
Diego	3	7	Peter	15	8
Dominique	3	15	Philippe	15	23
Erik	4	12	Robert	17	18
Eva	4	4	Sacha	18	20
Gerard	6	23	Stephan	18	22
Hichem	7	9	Sylvain	18	3
Ian	8	21	Thomas	19	7
Jacques	9	11	Tudor	19	22
Jean-François	9	9			

- Écrire les tables de hachage correspondant à l'utilisation de  $h_1$  et  $h_2$  respectivement.
- Est-ce que l'une des deux tables de hachage est meilleure que l'autre? En quel sens?
- Est-ce que la différence est due uniquement au hasard, ou voyez-vous une raison pour laquelle une des fonctions de hachage pourrait être préférable à l'autre pour stocker des prénoms?