ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 1 21 Septembre 2007

1. Théorie des ensembles

On rappelle que pour un ensemble S, $\mathrm{Pot}(S)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de S. Par exemple si $S = \{1, 2\}$, on a $\mathrm{Pot}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. ($\emptyset$ est l'ensemble vide.)

S^* est l'ensemble des mots sur S, donc si $S = \{1, 2\}$ on a $(), (1), (1, 2), (1, 1, 2), (2, 2, 1, 2, 1, 2) \in S^*$. $()$ denote le mot vide, formellement on a $() = \emptyset$ (la notation $()$ est utilisée pour indiquer que nous l'interprétons comme un mot). S^+ denote les mots *non vides* sur S. Donc $S^* = S^+ \cup \{()\}$.

Rappelons également que $\{1\} \neq 1$. On a

- $1 \in \mathbb{N}$
- $\{1\} \subset \mathbb{N}$
- $\{1\} \in \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$

On rappelle aussi qu'une relation entre deux ensembles A et B est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$. Une relation entre A et A est appelée une relation sur A. (Pour les détails, voir p. 6 du polycopié.)

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

(1) $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$
(2) $\{1, 2\} \in \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$
(3) $\{ding, dong\} \in \{\{ding\}, \{dong\}\}$
(4) $\{\{a\}, \{b\}\} \subseteq \mathrm{Pot}(\{a, b, c\})$
(5) $\{\{a\}, \{b\}\} \in \mathrm{Pot}(\{a, b, c\})$
(6) $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathbb{N})$
(7) $\emptyset \in \mathrm{Pot}(\{Loki, Balder\})$
(8) $\mathbb{R} \in \mathrm{Pot}(\mathbb{R})$
(9) $\{(0, 0), (1, 1)\} \in \mathbb{R}^2$
(10) $\{(\pi, 0.9999)\} \subseteq \mathbb{R}^2$
(11) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$
(12) $(1, sandman) \in \mathbb{N} \times \{sandman, puppet\}$
(13) $\{1, 2\} \times \{0.99\}$ est une relation entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$
(14) $\mathbb{N} \times \{\pi, 0.01, -7\}$ est une relation sur $\mathbb{R}$
(15) $(-1) \in \mathbb{R}^+$
(16) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair}\} \times \{2\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
(17) $S \subseteq T \iff S \in \mathrm{Pot}(T)$
(18) $(\mathbb{N} \times \{\pi, e, 1.6180\}) \cap (\{\pi, e, 1.6180\} \times \mathbb{N}) = \emptyset$
(19) $\{\{1\}, \{2\}\} \times \{1, 2, 3\}$ est une relation sur $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$
(20) $\{1, 1, 2\} = \{2, 1\}$
(21) $(1, 1, 2) = (2, 1)$
(22) $\{(), (\emptyset), (\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \subset (\mathrm{Pot}(\emptyset))^+$

2. Spécification formelle I

Considérons le problème suivant : étant donné un ensemble fini de nombres naturels S, les éléments de S sont-ils tous pairs ?

Nous voulons trouver une spécification formelle de ce problème, c'est-à-dire :

- l'ensemble des inputs possibles I
- l'ensemble des outputs possibles O
- la dépendance relationnelle entre les deux $R \subseteq I \times O$, avec

$$(i, o) \in R \iff o \text{ est un output valable quand l'input } i \text{ est donné au problème}$$

a) Indiquer lesquels des éléments suivants sont dans I : 4, 7, $\mathbb{N}$, $\{1, 2\}$, $\{1\}$, $\{1, \ldots, 100\}$, $\mathrm{Pot}(\mathbb{N})$, $\{-1, 100, 2\}$.

b) Que vaut I ?

c) Puisqu'il s'agit d'un problème de décision, on sait que $O = \{vrai, faux\}$. Indiquer lesquels des éléments suivants sont dans R : $(2, vrai)$, $(\{2\}, vrai)$, $(\mathbb{N}, faux)$, $(7, faux)$, $(\{1, \ldots, 100\}, faux)$, $(\{1, 2, 4, 6\}, vrai)$.

d) Que vaut R ?

Considérons maintenant le problème suivant : étant donné un ensemble fini de nombres naturels S, combien y a-t-il d'éléments de S qui sont pairs ?

On veut trouver une spécification formelle (I_2, O_2, R_2) de ce problème.

e) Que vaut I_2 ?

f) Que vaut O_2 ?

g) Indiquer lesquels des éléments suivants sont dans R_2 : $(\{1, 2, 3\}, 1)$, $(\{1, 8, 6, 2\}, 3)$, $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 4\})$.

h) Étant donné un ensemble S, exprimer de manière formelle l'assertion suivante : "Il existe un sous-ensemble de S de taille n, dont tous les éléments sont pairs". (utiliser la partie d)).

i) Que vaut R_2 ?

3. Spécification formelle II

Donner des spécifications formelles des problèmes suivants :

a) Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer si n est impair.

b) Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$, quel est son plus grand diviseur qui soit inférieur à n ?

c) Un *sous-mot* d'un mot W est un mot dont les composantes se trouvent aussi dans W, et ceci consécutivement et dans le même ordre. Par exemple, (m, i, c, r, o) est un sous-mot de $(m, i, c, r, o, s, o, f, t)$, $(4, 7, 11)$ est un sous-mot de $(9, 3, 4, 7, 11, 5)$, mais (n, f, x) n'est pas un sous-mot de (n, o, f, x) et $(\text{rouge}, \text{bleu})$ n'est pas non plus un sous-mot de $(\text{bleu}, \text{rouge}, \text{vert})$.

Le problème est le suivant : Soit $\mathcal{A} = \{a, b, \ldots, z\}$, et soient $S = (s_1, \ldots, s_n)$ et $T = (t_1, \ldots, t_m)$ des mots non vides sur $\mathcal{A}$ (i.e., $S, T \in \mathcal{A}^+$). Est-ce que S est un sous-mot de T ?

4. Induction

Prouver par induction les affirmations suivantes :

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 10$ on a $2^n > n^3$.

d) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

e) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, n est un produit de nombres premiers (utiliser l'induction forte).