ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 7 9 Novembre 2007

1. Sac à dos 0/1

a) Trouver une solution optimale (i.e. objets et valeur optimale) au problème du sac à dos 0/1 suivant :

$W = 20,$

objet	A	B	C	D	E
valeur	22	15	8	15	15
poids	11	7	6	7	3

b) La solution optimale dans le problème ci-dessus, est-elle unique ? Si ce n'est pas le cas, donner toutes les solutions optimales. Peut-on adapter l'algorithme du point a) pour trouver toutes les solutions optimales ? Comment faire ?

c) Montrer que si on a un problème de sac à dos avec n objets, alors il peut y avoir au plus 2^n solutions optimales.

d) Montrer que pour tout n pair, il y a un choix de W, des v_i et des w_i tel qu'il y a au moins $2^{n/2}$ solutions optimales.

2. Le code optimal n'est pas unique

a) Considérer l'alphabet (a, b, c, d) avec les fréquences $(\frac{4}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12})$.

(i) Construire un code de Huffman pour cet alphabet avec les fréquences données.

(ii) Montrer que pour cet alphabet il existe deux codes de Huffman de longeurs $(1, 2, 3, 3)$ et $(2, 2, 2, 2)$.

(iii) Pour chacun des deux codes, calculer sa longueur moyenne.

b) Existe-t-il aussi des codes optimaux qui ne sont pas des codes de Huffman (i.e., que l'algorithme de Huffman ne trouve pas) ? On suppose que les fréquences sont > 0. Justifier votre réponse.

3. Multiplication de plusieurs matrices

Supposons que nous avons 4 matrices aux formats suivants :

Matrice	Format
A_1	5×10
A_2	10×3
A_3	3×12
A_4	12×5

Calculer la disposition de parenthèses de l'expression $A_1 \cdots A_4$ qui minimise le nombre de multiplications nécessaires.

4. Le nombre de façons dont on peut placer des parenthèses

On rappelle que théorème 4.1 dit : pour le produit $A_1 \cdots A_n$, le nombre de façons dont on peut placer les parenthèses est

$$C_n := \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Le nombre de façons on peut placer les parenthèses pour le produit } A_1 \cdots A_{n+1} \text{ est donc} \\ \\ C_{n+1} = \tfrac{1}{n+1}\tbinom{2n}{n}\end{array}\right)$$

Le but de cet exercise est de prouver ce théorème et d'étudier les propriétés de la suite C_n.

a) Montrer que

$$\begin{aligned} C_3 &= C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_1, \\ C_4 &= C_1 \cdot C_3 + C_2 \cdot C_2 + C_3 \cdot C_1, \\ C_5 &= C_1 \cdot C_4 + C_2 \cdot C_3 + C_3 \cdot C_2 + C_4 \cdot C_1, \end{aligned}$$

et qu'en général

$$C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i}, \forall n \geq 2$$

b) Montrer que

$$2^n < \binom{2n}{n} < 4^n$$

Ainsi, le nombre de dispositions de parenthèses est exponentiel en n.

c) Considérons l'ensemble des mots de longueur $2n$ sur l'ensemble {"(", ")"} se composant de n ")" et n "(" . Il y a en tout $\binom{2n}{n}$ mots de cette forme (il faut choisir la position de chacun des n "(" parmi les $2n$ possibilités pour définir un tel mot). Par exemple pour $n = 2$ on obtient $\binom{4}{2} = 6$ mots :

$$(()),()(),))((,)()(,)((),())($$

Cependant, les parenthèses ne sont pas toujours placées correctement dans ces suites. Nous appelons un mot *acceptable* si aucun préfixe (i.e., sous-mot commençant au premier élément) ne contient plus de ")" que de "(", et *inacceptable* sinon. Dans l'exemple $n = 2$ ci-dessus les mots acceptables sont

$$(()) \text{ et } ()().$$

Pour $n = 3$ il y a au total $\binom{6}{3} = 20$ suites, parmi lesquelles 5 sont acceptables :

$$((())),()(()),()()(),(())(), \text{ et } (()())$$

Montrer que le nombre de mots inacceptables est

$$\binom{2n}{n-1}$$

Indice : Dans chaque mot inacceptable considérer le premier ")" qui rend le mot inacceptable et après ce ")" remplacez tous les "(" par ")" et tout les ")" par "(". Ensuite vous avez un mot avec $n-1$ "(" et $n+1$ ")". Montrer que le nombre de suites inacceptables est égal au nombre de suites avec $n-1$ "(" et $n+1$ ")".

d) Calculer le nombre de suites acceptables et le comparer avec C_{n+1}.

e) En déduire qu'on peut disposer les parenthèses dans un produit de $n+1$ éléments de C_{n+1} façons.