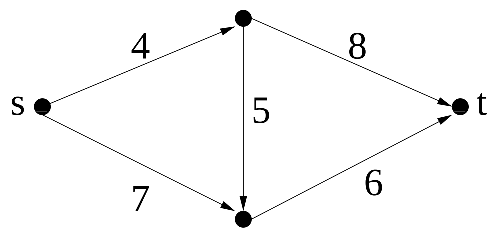
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

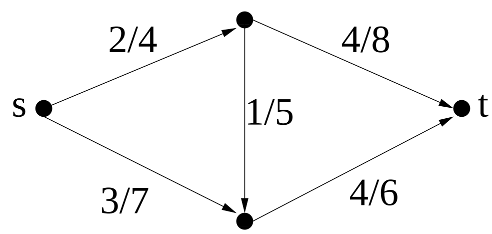
Série d'exercices 10 30 Novembre 2007

1. Flux

On considère le réseau suivant :



a) L'application suivante est-elle un flux ?



b) Trouver un flux maximal pour ce réseau. Quelle est sa valeur ?

c) Supposons qu'il s'agit d'un résau de tuyaux de distribution d'eau, et qu'il faut enlever un des tuyaux. Lequel faudrait-il enlever pour diminuer aussi peu que possible le flux maximal ?

d) Supposons qu'on peut remplacer l'un des tuyaux par un tuyau de capacité 10. Lequel faudrait-il remplacer pour augmenter autant que possible le flux maximal ?

2. Augmenter les poids

Soit $G = (V, E)$ un graphe et T un arbre couvrant minimal de G.

a) Si on augmente le poids de chaque arête de G par une constante c, est-ce que l'arbre T reste minimal ? Justifiez votre réponse.

b) Si on diminue le poids de l'une des arêtes de T, T est-il encore un arbre couvrant minimal de G ? Justifiez votre réponse.

3.Deuxième meilleur arbre couvrant

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe non-orienté avec une fonction de poids $w : E \to \mathbb{R}$ telle que tous les poids des arêtes sont distincts.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble de tous les arbres couvrants de G et soit T' un arbre couvrant minimal de G. On dit qu'un arbre couvrant T est *deuxième meilleur* si $w(T) = \min_{T'' \in \mathcal{T} \setminus \{T'\}} \{w(T'')\}$.

a) Montrer que l'arbre couvrant minimal est unique, mais que le deuxième meilleur arbre ne l'est pas en général.

b) Soit T l'arbre couvrant minimal de G. Démontrer qu'il existe des arêtes $(u, v) \in T$ et $(x, y) \in E \setminus T$ telles que $(T \setminus \{(u, v)\}) \cup \{(x, y)\}$ est un deuxième meilleur arbre couvrant de G.

4. Attribution optimale

Soient 15 étudiants, dont 6 des informaticiens que nous appelons $I_1, \ldots, I_6$ et 9 des physiciens $P_1, \ldots, P_9$. La résidence d'étudiants doit leur attribuer des chambres $C_1, \ldots, C_6$ dont C_1 et C_2 sont des chambres doubles et $C_3, \ldots, C_6$ sont des chambres simples. Chaque étudiant a une liste de chambres acceptables pour lui :

Étudiant	Chambres acceptables
P_1	C_1, C_3
P_2	C_1, C_2, C_3, C_4, C_5
P_3	C_4, C_5
P_4	C_2
P_5	C_3, C_6
P_6	C_1, C_2
P_7	C_3, C_4, C_5, C_6
P_8	C_5, C_6
P_9	C_3, C_5
I_1	C_2, C_3, C_4
I_2	C_1, C_6
I_3	C_2, C_5
I_4	C_3, C_4, C_6
I_5	C_1
I_6	C_2, C_5

Le problème est d'attribuer le nombre maximal d'étudiants aux chambres tel que

- On n'attribue pas de chambre inacceptable à un étudiant.
- Une chambre double aura au plus deux étudiants, une chambre simple au plus un.
- Si deux étudiants sont attribués la même chambre, alors ils n'étudient pas le même sujet.

a) Quel algorithme de graphe du cours utiliserez-vous pour résoudre ce problème ?

b) Dessinez le graphe correspondant à ce problème.

5. Connexité d'un graphe

a) Soit $G = (V, E)$ un graphe. On suppose que les arêtes sont représentées par une liste liée. Donner un algorithme $O((|V| + |E|) \log(|V|))$ pour compter le nombre de composantes connexes dans le graphe. *Indication :* Utiliser UnionFind.

b) Est-il possible de faire mieux ? Peut-on y arriver en $O(|V| + |E|)$? On permet de stocker des données auxiliaires dans les sommets, si nécessaire.

c) Donner un algorithme raisonnable qui trouve, pour un graphe donné, un ensemble minimal d'arêtes à enlever pour obtenir un graphe qui n'est pas connexe.