

**Exercice 1.1.** Soit  $X$  et  $Y$  des ensembles non vides, et soit  $f: X \rightarrow Y$  une application. De plus, soit  $A, B \subseteq X$  et  $C, D \subseteq Y$ . Montrer les assertions suivantes :

- (a)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .
- (b)  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ .
- (c)  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .
- (d)  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ .

**Exercice 1.2.** Pour un ensemble  $X$ , l'ensemble des parties de  $X$  est défini par

$$P(X) := \{A \mid A \subseteq X\}.$$

- (a) Construire une application injective  $f: X \rightarrow P(X)$ .
- (b) Montrer que si  $g: X \rightarrow P(X)$ , alors  $g$  n'est pas surjective. [Indication : considérer l'ensemble  $A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$ ].

**Exercice 1.3.** Soit  $A$  et  $B$  deux sous ensembles d'un ensemble  $X$ . L'ensemble

$$A \Delta B := (A - B) \cup (B - A)$$

est appelé la *différence symétrique* de  $A$  et  $B$ . Montrer que

- (a)  $A \Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ .
- (b) Si  $A \Delta B = A^c$ , alors  $B = X$ .
- (c)  $A \Delta A = \emptyset$ .
- (d) Si  $C$  est un sous ensemble de  $X$ , alors  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ , c'est à dire que l'opération  $\Delta$  est associative.
- (e) L'ensemble  $P(X)$  munit de l'opération  $\Delta$  est un groupe.
- (f) Si  $X$  est fini alors

$$\#(A \Delta B) = \#A + \#B - 2\#(A \cap B)$$

**Exercice 1.4.** Soit  $X$  et  $Y$  des ensembles non vides,  $F \subseteq X \times Y$ , et  $G \subseteq Y \times X$ . Pour  $A \subseteq X$  on définit  $\phi(A) \subseteq Y$  par

$$\phi(A) := \{y \in Y \mid \exists a \in A: (a, y) \in F\}.$$

De manière similaire, on définit  $\gamma(B) \subseteq X$  pour  $B \subseteq Y$ . Montrer que si  $\gamma(\phi(\{x\})) = \{x\}$  et  $\phi(\gamma(\{y\})) = \{y\}$  pour tout  $x \in X$  et  $y \in Y$ , alors  $F$  est le graphe d'une fonction bijective entre  $X$  et  $Y$ .

**Exercice 1.5.** Une université a publiée les résultats suivants suite à un recensement de ses étudiants : Il y a 10000 étudiants parmi lesquels 2521 sont mariés, 6471 sont des hommes, 3115 ont plus de 21 ans, 1915 sont des hommes mariés, 1873 sont mariés et ont plus de 21 ans, et 1302 sont des hommes mariés de plus de 21 ans. Ces nombres peuvent-ils être corrects ?