Correction.

**Exercice 10.1.** On utilise toutes les relations qu'on connaît entre les divers paramètres :

1. $(2|E| = \sum d_i) \Rightarrow 2m = nd$
2. (toutes les faces sont adjacentes à $k$ arêtes) $\Rightarrow 2m = fk$
3. (formule d'Euler) $\Rightarrow n - m + f = 2$

On utilise (1) et (2) pour remplacer $n$ et $f$ dans 3 :

$$\frac{2m}{d} - m + \frac{2m}{k} = 2$$

ce qui donne en divisant par $2m$ :

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} .$$

Pour les polyèdres réguliers convexes, on sait que $k > 2$ et $d > 2$, sinon on obtient des cas dégénérés. Comme $m$ est un entier on doit donc nécessairement avoir $\min(d, k) = 3$. On en déduit pour $d = 3, k \in \{3, 4, 5\}$ avec respectivement $m \in \{6, 12, 30\}$. Et de même pour $k = 3$ on doit avoir $d \in \{3, 4, 5\}$ avec les mêmes $m$. On ne peut donc avoir plus de 5 polyèdres réguliers convexes.

**Exercice 10.2.** Construisons de manière récursive sur $n$ un graphe planaire avec $n$ sommets et $3n - 6$ arêtes. On commence pour $n = 3$ avec un triangle. Ensuite pour l'étape $n \to n + 1$ de la récurrence, on prend une face $f$ d'une représentation planaire du graphe à l'étape $n$ et on rajoute un sommet dans cette face et trois arêtes vers des sommets du bord de cette face (ce qui est toujours possible car la face a au moins trois sommets). Il est alors facile de vérifier que le nouveau graphe a $3(n + 1) - 6$ arêtes et est toujours planaire.

**Exercice 10.3.** On fait une récurrence sur le nombre $m$ d'arêtes du graphe. Pour $m = 0$, il y a qu'une face infinie et la carte induite est trivialement 2-coloriable (elle est même 1-coloriable). Supposons maintenant que l'affirmation soit vraie pour tout $i < m$, et prenons un représentation planaire d'un graphe avec $m$ arêtes dont tous les degrés sont pairs. On choisit une face $f$ de ce graphe et on enlève toutes les arêtes de son bord pour obtenir un graphe $G'$. Remarquer que la face $f$ de $G$ est strictement incluse dans une face $f'$ de $G'$. De plus, tous les degrés de $G'$ sont encore pairs (car on a juste diminué le degré de certains sommets de 2) et par hypothèse de récurrence la carte qu'il induit est 2-coloriable. On peut alors colorier la face $f$ de la couleur opposée à celle de $f'$ pour obtenir un 2-coloriage de la carte induite par $G$.

**Exercice 10.4.** Soit $G = (V, E)$ un graphe et $c$ un coloriage de $G$ avec $\chi(G)$ couleurs. On définit une fonction $f$ de $E$ dans les parties à deux éléments de l'ensemble des couleurs par $f((a, b)) = \{c(a), c(b)\}$ pour deux sommets $a$ et $b$. Si $f$ n'est pas surjective, il existe alors 2 couleurs $c_1$ et $c_2$ telles qu'aucune arête n'existe entre les sommets coloriés avec ces couleurs. On peut alors colorier tous les sommets de couleur $c_2$ en $c_1$ pour obtenir un coloriage de $G$ avec strictement moins que $\chi(G)$ couleurs ce qui est une contradiction. On en déduit que $f$ est surjective et comme $|E|$ est plus grand que $|f(E)|$ on trouve que $G$ a au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes.