

Exercice 10.1. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a pas d'autres polyèdres réguliers convexes que les 5 solides de Platon. Il est facile de voir que le graphe de tels polyèdres est un graphe planaire tel que chacun des n sommets soit de même degré d et que chacune des f faces soit adjacente à k arêtes. En notant de plus m le nombre d'arêtes, montrer que seulement 5 valeurs sont possibles pour (d, k, n, m, f) .

Exercice 10.2. Montrer que pour tout $n \geq 2$ il existe un graphe planaire avec n sommets et $3n - 6$ arêtes.

Exercice 10.3. Soit G un graphe planaire tel que tout sommet soit de degré pair. Montrer que la carte induite par les faces d'un dessin de G dans le plan est 2-coloriable. (Indice : on pourra faire une récurrence sur le nombre d'arêtes de G).

Exercice 10.4. Montrer qu'un graphe G a au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes.