Correction.

Exercice 11.1. On raisonne par récurrence sur le nombre de sommets de G. L'affirmation est claire si G n'a qu'un sommet. Supposons que G a n sommets, avec $n \geq 1$. Choisissons un sommet v de G et supprimons-le du graphe avec toutes les arêtes qui lui sont reliées. Cela nous donne un nouveau graphe G', avec $n-1$ sommets, et $\Delta(G') \leq \Delta(G)$. Par hypothèse de récurrence, G' est coloriable par liste avec au plus $\Delta(G')+1 \leq \Delta(G)+1$ couleurs. De plus, parmi les voisins de v qui sont au plus $\Delta(G)$, une des couleurs de la liste associée à v n'apparaît pas, et donc v peut être colorié avec cette couleur. Cela marche quelle que soit la liste de couleurs associé à G, d'où le résultat.

Exercice 11.2. On suit l'indication de l'énoncé, et on cherche à construire f. Notons les sommets de $K_{3,3}$ a_1, a_2 et a_3 pour les sommets de gauche et b_1, b_2 et b_3 pour les sommets de droite. On part avec $f(a_1) = \{1, 2\}$, une des façons de trouver un contre-exemple est d'associer aux trois sommets de gauche les parties à 2 éléments de $\underline{3}$. Par exemple $f(b_1) = \{2, 3\}$, $f(b_2) = \{1, 3\}$ et $f(b_3) = \{1, 2\}$. Quelle que soit la couleur avec laquelle on colorie a_1, les deux autres couleurs de $\underline{3}$ apparaîtront dans les sommets de gauche. En choisissant alors $\{2, 3\}$ pour a_2 et $\{1, 3\}$ pour a_3, il n'est pas possible d'obtenir un coloriage admissible pour cette fonction f.

Exercice 11.3. On suit l'indication de l'énoncé et on fait une récurrence sur la distance entre v_1 et v_2.

– Si v_1 et v_2 sont voisins (distance 1), en enlevant l'arête (v_1, v_2), G est encore connexe. Donc il existe un chemin c de v_1 a v_2 qui n'utilise pas cette arête. En ajoutant (v_1, v_2) à c on obtient alors un cycle qui passe par v_1 et v_2.
– Supposons maintenant l'affirmation vraie pour tout couple de sommets à distance $i-1$ et choisissons v_1 et v_2 à distance i. Soit $m_1 = (v_1, \ldots, u, v_2)$ un plus court chemin entre v_1 et v_2. u est alors à distance $i-1$ de v_1 et par hypothèse de récurrence, on peut trouver un cycle c qui contient v_1 et u. S'il contient aussi v_2 on a fini, sinon enlevons l'arête (u, v_2) de G. Comme le graphe résultant est connexe par hypothèse, il existe un chemin m_2 entre v_2 et v_1. Soit alors v le sommet le plus proche de v_2 qui appartient à la fois à m_2 et à c (remarquez qu'il peut s'agir de v_1). En suivant alors le chemin m_2 de v_2 à v, puis en empruntant le cycle c jusqu'à v_1, puis en continuant sur c jusqu'à u et en terminant par l'arête (u, v_2) on obtient alors un cycle qui passe par v_1 et v_2. Pour montrer que c'est bien un cycle, remarquons d'abord que l'arête (v_1, v_2) n'appartient ni a m_2 ni a c. Ensuite, par définition de v, aucune arête de m_2 n'est dans c, d'où le résultat.

Exercice 11.4.

1. On a
$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(x_iy_j - x_jy_i)^2 &= \sum_{i,j}(x_i^2y_j^2 + x_j^2y_i^2 - 2x_ix_jy_iy_j)\\ &= 2\sum_{i,j}x_i^2y_j^2 - 2\sum_{i,j}x_ix_jy_iy_j\\ &= 2(\sum_i x_i^2)(\sum_j y_j^2) - 2(\sum_i x_iy_i)(\sum_j x_jy_j)\\ &= 2(\sum_i x_i^2)(\sum_i y_i^2) - 2(\sum_i x_iy_i)^2\ .\end{aligned}$$
d'où l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
2. Il suffit de poser $y_i = 1$ pour tout i.
3. Il y a égalité dans (1) ssi tous les termes $(x_iy_j - x_jy_i)^2$ sont nuls ce qui impose, avec $y_i = 1$ pour tout i, que tous les x_i sont égaux.