

Exercice 12.1. Répondez aux questions suivantes :

1. Quelle est la série génératrice de la séquence $1, 1, 1, \dots$?
2. A quelle séquence correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^2}$?
3. A quelle séquence correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^3}$?
4. Utiliser les questions précédentes pour trouver la série génératrice des carrés : $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$

Exercice 12.2. Calculer la série génératrice, puis déduire une forme close des séquences suivantes :

1. $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = 2a_n + 1$.
2. $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 2^n$.

Exercice 12.3. Les nombres de Pell P_n sont définis par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$.

1. Trouver la série génératrice des nombres de Pell.
2. En déduire une formule close pour ces nombres.
3. Quelle est la limite de P_{n+1}/P_n ?
4. Les nombres de Pell font leur apparition très tôt dans les Mathématiques et permettent en particulier de construire des approximations rationnelles de $\sqrt{2}$. C'est-à-dire d'approcher $\sqrt{2}$ par des fractions de la forme p/q avec p et q entiers. En utilisant la question 3, voyez-vous comment ?