Correction.

Exercice 13.1. 1. Soit $\Sigma_n := \{(s_1, \ldots, s_k) \mid \sum_i s_i = n, s_i \in \{1,2,3\}\}$, on a alors $S_n = |\Sigma_n|$. Pour $\ell = 1,2,3$ soit $\Sigma_{n,\ell} := \{(s_1, \ldots, s_k) \mid \sum_i s_i = n, s_i \in \{1,2,3\}, s_k = \ell\}$ et donc $\Sigma_n = \sqcup_{\ell=1}^3 \Sigma_{n,\ell}$. On remarque que $|\Sigma_{n,\ell}| = S_{n-\ell}$, ainsi

$$S_{n+3} = S_{n+2} + S_{n+1} + S_n$$

pour $n \geq 1$.

2. Considérons la série génératrice $S(x)$ associée à S_n. La formule de récurrence ci-dessus se traduit en une équation sur la série génératrice :

$$S(x) = xS(x) + x^2 S(x) + x^3 S(x) + P(x)$$

avec $P(x)$ un polynôme du second degré qui tient compte des conditions initiales. Le comportement asymptotique de S_n va dépendre des racines de $1 - x - x^2 - x^3$. Il est facile de voir que cette fonction est strictement décroissante, de plus elle est positive en 0 et négative en 1, elle admet donc une seule racine réelle r. En utilisant la calculatrice, on peut obtenir un valeur approché de r, 0.543. On peut alors écrire $1 - x - x^2 - x^3 = -(x - r)(x^2 + bx + c)$. En identifiant les termes on trouve $c = 1/r$ et $b = 1 + r$. En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, les deux racines complexes conjuguées w et $\overline{w}$ de $1 - x - x^2 - x^3$ s'écrivent $(-b \pm \sqrt{\Delta})/2$ et, ce qui est plus important, sont de module $\sqrt{(b^2 + \Delta)/4} = 1/\sqrt{r}$. Finalement, on peut écrire

$$S(x) = \frac{A}{1 - x/r} + \frac{B}{1 - x/w} + \frac{C}{1 - x/\overline{w}}$$

avec A réel et B, C complexes et conjugués. Ce qui donne

$$S_n = A(1/r)^n + B(1/w)^n + C(1/\overline{w})^n .$$

De plus, A est non nul car sinon comme $|1/w| < 1$, $S(x)$ tendrait vers 0 ce qui n'est clairement pas le cas. On en déduit que S_n se comporte comme A/r^n et avec $\theta = 1/r$ on montre que la limite de l'énoncé existe et vaut A.

Exercice 13.2. $f = \sum_i \binom{n}{i}(-x)^i$ and $g = \sum_i \binom{n}{i}(x)^i$. Then the sum in question is the coefficient of x^n in gf. But $f = (1-x)^n$ and $g = (1+x)^n$, so that $gf = (1-x^2)^n$. The coefficient of x^n in this polynomial is thus zero if n is odd, and it is $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$ if n is even.

Exercice 13.3. let V denote the set of nodes of G. Consider a matrix with $\binom{n}{3}$ rows and n columns in which the rows are indexed by subsets of size 3 of V, and the rows are indexed by elements of V. At rows $\{v_1, v_2, v_3\}$ and column u, put a value 1 into the matrix iff u is connected to v_1, v_2, and v_3 ; otherwise put a zero. Now, we calculate the number M of ones in this matrix. Each row of this matrix can have at most 2 ones, since the graph does not contain a $K_{3,3}$, so $M \leq 2\binom{n}{3}$. On the other hand, the column corresponding to $u \in V$ has $\binom{\deg(u)}{3}$ ones, as this is the number of 3-element subsets u is connected to. Let $d_1, \ldots, d_n$ be the degrees of the nodes in V. Then we have

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{3} = M \leq 2\binom{n}{3}.$$

This shows that

$$\sum_{i=1}^n (d_i - 2)^3 \leq 2n^3 .$$

That is

$$\sum_{i=1}^n d_i^3 \leq 2n^3 + 6\sum_i d_i^2 + n8 \leq cn^3$$

because $\sum_i d_i^2$ is at most $n(n-1)$.

Now, we use the indication $\sum_{i=1}^n d_i^3 \geq n\left(\frac{s}{n}\right)^3$ with s equal to twice the number m of edges in G. So, $8m^3/n^2 \leq cn^3$ and finally $m \leq (c/8)^{1/3} n^{5/3}$.

The only thing left to show is that if $\sum_{i=1}^n x_i = s$ then $\sum_i x_i^3 \geq n\left(\frac{s}{n}\right)^3$. For this, let us do an induction on n.

- for $n = 1$ we have an equality, ok.
- Suppose it is true for n, we then have

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^3 = x_{n+1}^3 + \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \geq x_{n+1}^3 + n\left(\frac{s - x_{n+1}}{n}\right)^3 .$$

Writing $x = x_{n+1}$ we want to minimize the right hand term. Its derivative is $3x^2 - 3\left(\frac{s-x}{n}\right)^2$ and is equal to zero for $x = (s-x)/n$ that is $x = s/(n+1)$. It is easy to verify that this point correspond to an absolute minimum, hence the result.