Exercice 13.1. Soit n un entier et soit S_n le nombre de vecteurs $(s_1, \ldots, s_k) \in \{1, 2, 3\}^k$ tels que $\sum_i s_i = n$ et $k \geq 1$ entier. Par exemple, $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 4$ et $S_4 = 7$.

1. Trouver une récurrence pour S_n qui fait intervenir S_{n-1}, S_{n-2} et S_{n-3}.
2. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que S_n/θ^n converge vers un nombre réel non nul quand n tend vers l'infini. Calculer les premières décimales de θ.

Exercice 13.2. Calculer la somme

$$\sum_{u=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} .$$

(Indice : exprimer cette somme comme un coefficient d'un produit de deux polynômes).

Exercice 13.3. Montrer qu'il existe une constante c telle que si un graphe G avec n sommets ne contient pas $K_{3,3}$ comme sous-graphe, alors G a au plus $cn^{5/3}$ arêtes. (Indice : Utiliser la même approche que dans la preuve du théorème 6.14. Vous aurez sûrement besoin de montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres réels positifs de somme s alors $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \geq n(s/n)^3$. Une méthode pour cela est de faire une récurrence.)