Exercice 2.1. Soit X, Y, et Z des ensembles. Soit $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ des fonctions. Prouver ou trouver un contre exemple pour les faits suivants :

(a) Si $g \circ f$ est surjective, alors f et g sont surjective.

(b) Si $g \circ f$ est injective, alors f et g sont injective.

On rappelle que $g \circ f$ est une fonction de X dans Z et est definie par $g \circ f(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in X$.

Exercice 2.2. Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble A de toutes les parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

1. Soit $n \in \mathbb{N}_0$, montrer par récurrence sur n que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ qui contiennent exactement n éléments est dénombrable.
2. Construire maintenant une injection de A dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et en déduire que A est dénombrable.
3. Donner l'idée d'une autre preuve basée sur la représentation binaire d'un nombre entier.

Exercice 2.3. Soit x, y et z des variables booléennes.

1. Donner la table de vérité de $x \Leftrightarrow y$.
2. Montrer que $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x)$ est une tautologie (c'est le principe de contraposition).
3. Montrer que $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Leftrightarrow ((x \wedge y) \Rightarrow z))$ est une tautologie.
4. $((x \wedge y) \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \vee y) \Rightarrow z))$ est elle une tautologie ?

Exercice 2.4. Soit $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$. Montrer que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ ssi un nombre pair des x_i est à 1.

Exercice 2.5. Soit $f \in \mathcal{H}_4 \to \mathcal{H}_1$ une fonction booléenne qui vaut 1 uniquement sur les quadruplets qui contiennent exactement deux 1. Par exemple, $f(1,0,1,0) = 1$ alors que $f(0,1,1,1) = f(1,0,0,0) = 0$.

(a) Trouver une forme DNF pour f.

(b) Trouver une forme CNF pour f.

(c) Trouver une forme polynomiale pour f.