Exercice 3.1. Quelles sont les distributions de valeurs des variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ qui rendent les formules suivantes vraies :

1. $F = (x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (x_2 \Rightarrow x_3) \wedge \cdots \wedge (x_{n-1} \Rightarrow x_n)$.
2. $G = F \wedge (x_n \Rightarrow x_1)$.
3. $H = \bigwedge_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \ne j}} (x_i \Rightarrow \neg x_j)$.

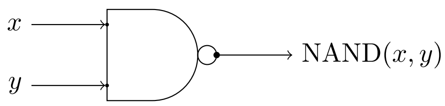
Exercice 3.2.
- Donner une CNF, une DNF, et une forme polynomiale de $(x_1 \Leftrightarrow (x_2 \Leftrightarrow x_3))$.
- Dessiner un diagramme logique de la fonction $f(x, y) = (x \Rightarrow y)$ en utilisant les portes AND et XOR.

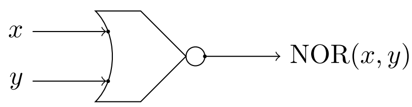
Exercice 3.3. Un coffre fort est muni de 5 serrures, et ne peut être ouvert que lorsque les 5 serrures sont simultanément en position ouverte. Cinq personnes : Alice, Bernard, Christine, Dominique et Emile reçoivent chacun des clefs, correspondants à certaines de ces serrures. Donner une répartition possible des clefs telle que le coffre puisse être ouvert si et seulement si l'on se trouve dans l'une des situations suivantes :
- Présence de Alice et Bernard.
- Présence de Alice, Christine et Dominique.
- Présence de Bernard, Dominique et Emile.

Exercice 3.4. Les fonctions NAND et NOR sont définies comme suit :

$$\text{NAND}(x, y) := \neg(x \wedge y), \quad \text{NOR}(x, y) = \neg(x \vee y).$$

1. Trouver une forme DNF pour NAND et une forme DNF pour NOR.
2. Trouver une forme CNF pour NAND et une forme CNF pour NOR.
3. Trouver une représentation polynomiale pour NAND et NOR.
4. Montrer que la fonction AND, OR, et la négation peuvent s'obtenir comme combinaisons des fonctions NAND et NOR.
5. Les diagrammes logiques pour les fonctions NAND et NOR sont donnés ci-dessous :





   Dessiner les diagrammes des fonctions AND, OR et négation à l'aide de ces blocs.
6. Dessiner un diagramme logique de la fonction XOR en utilisant ces blocs.

Exercice 3.5. [Transformé de Moebius] Soit f une fonction de m variables. La forme polynomiale de f peut toujours s'écrire

$$f(X_1, \dots, X_n) = \bigoplus_{u \in \{0,1\}^n} f_u X_1^{u_1} \cdots X_n^{u_n}$$

ou $f_u \in \{0, 1\}$ et par définition $X_i^1 = X_i$ et $X_i^0 = 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $u = (u_1, \dots, u_n)$ dans $\{0, 1\}^n$ on note $x \subseteq u$ ssi $x_i \Rightarrow u_i$ pour tout i. Le but de l'exercice est de montrer la relation suivante entre le vecteur des valeurs de f et sa représentation polynomiale :

$$f(x) = \bigoplus_{u \subseteq x} f_u \quad \text{et} \quad f_u = \bigoplus_{x \subseteq u} f(x)$$

1. Soit $u \in \{0, 1\}^n$ et la fonction monôme $m(X_1, \dots, X_n) = X_1^{u_1} \cdots X_n^{u_n}$. Montrer que $m(x) = 1$ ssi $u \subseteq x$. En déduire la première partie du résultat.
2. Montrer la seconde partie en montrant l'involutivité de la transformé de Moebius. C'est à dire en montrant que si l'on part de $f(x)$, puis que l'on calcule $f'_u = \bigoplus_{x \subseteq u} f(x)$ et ensuite $f'(y) = \bigoplus_{u \subseteq y} f'_u$ on a $f'(y) = f(y)$.