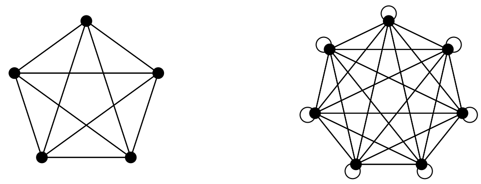
Exercice 4.1. Soit K un corps et n un entier positif. On défini la relation C sur $K^{n\times n}$ de la manière suivante :

$$A \sim_C B \iff \exists T \in K^{n\times n} \colon TAT^{-1} = B.$$

Montrer que $\sim_C$ est une relation d'équivalence. Elle est appelée la relation de conjugaison. Si $A \sim_C B$, alors A et B sont des matrices conjuguées.

Exercice 4.2. Une n-clique est un graphe avec n sommets tel que tous les couples de sommets soit connectés. Une n-clique avec des boucles est une n-clique avec en plus une boucle qui connecte chaque sommet à lui même. Par exemple, le dessin ci-dessous montre une 5-clique est une 7-clique avec des boucles.



Une clique est une n-clique pour un certain n. Soit R une relation d'equivalence. Montrer que le graphe de R est une union de clique avec des boucles.

Exercice 4.3. Soit X un ensemble non-vide et $R \subseteq (P(X) - \emptyset) \times (P(X) - \emptyset)$ la relation définie par $(A, B) \in R$ ssi $A \cap B \neq \emptyset$.

(a) R est-elle réflexive ? c'est à dire, $(A, A) \in R$ pour $A \in P(X)$?

(b) R est-elle symétrique ? c'est à dire, $(A, B) \in R$ implique $(B, A) \in R$?

(c) R est-elle transitive ? c'est à dire, $(A, B), (B, C) \in R$ implique $(A, C) \in R$?

Exercice 4.4. Soit R une relation transitive sur $\mathbb{Z}$ pour laquelle on sait que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si $|a-b| = 2$ alors $(a, b) \in R$. R est elle nécéssairement une relation d'équivalence ? Même question si $|a - b| \in \{3, 4\}$ implique $(a, b) \in R$.

Exercice 4.5. Trouver toutes les relations sur $\{a, b\} \times \{c, d\}$ qui ne sont pas des fonctions.

Exercice 4.6. Pour une relation R sur l'ensemble X, on défini la relation R^n par récurrence sur n avec $R^1 = R$ et $R^{n+1} = R \circ R^n$. Répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que si X est fini, il existe $s, r \in \mathbb{N}$ tels que $s < r$ et $R^s = R^r$.
2. Trouver une relation R sur un ensemble fini X tel que $R^{n+1} \neq R^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Trouver une relation R sur un ensemble infini X tel que toutes les R^n pour $n \in \mathbb{N}$ sont distinctes.
4. Montrer qu'une relation R est transitive ssi $R^n \subseteq R$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4.7. Montrer que si R_1 et R_2 sont des relations d'équivalences sur un ensemble X, alors il en est de même pour $R_1 \cap R_2$. De plus, montrer que ce n'est en général pas le cas pour $R_1 \cup R_2$.