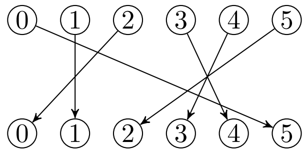
Exercice 5.1. Une *permutation sur un ensemble* S est une bijection $S \to S$. Dans cet exercice, on étudie le graphe orienté G_f qui correspond à une permutation f sur un ensemble fini.

1. Dessiner G_f pour la fonction f sur $\underline{6}$ donnée par le diagramme suivant :



2. Montrer que dans G_f chaque sommet a exactement une arête entrante et une arête sortante.
3. Montrer que G_f est une union disjointe de cycles (un cycle est un graphe $(\{v_1, \dots, v_m\}, E)$ avec $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_m, v_1)\}$.)
4. Montrer qu'il existe un $n \in N$ tel que $f^n = \mathrm{id}$, exprimer le plus petit n tel que cela soit vrai de telle manière qu'il soit facile de le calculer. Le faire sur l'exemple de la question 1.

Exercice 5.2. Supposons que A et B sont respectivement des matrices $m \times n$ et $n \times k$ avec des entrées dans $\{0, 1\}$. Le produit $\star$ de A et B, noté $A \star B$, est la matrice binaire C qui vérifie

$$C_{ij} = \bigvee_{\ell=1}^{n} A_{i\ell} \wedge B_{\ell j},$$

pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq k$. Supposons que R est une relation sur $\underline{m} \times \underline{n}$, et que S est une relation sur $\underline{n} \times \underline{k}$. De plus, soit A et B les représentations matricielles des relations R et S. Montrer que la représentation matricielle de $S \circ R$ est $A \star B$.

Exercice 5.3. Trouver les 16 types possibles de posets à 4 éléments.

Exercice 5.4. Soit R et S des relations sur $A \times B$ et $C \times D$, respectivement. Le *produit* $R \times S$ est une relation sur $(A \times C) \times (B \times D)$ telle que $((a, c), (b, d)) \in R \times S$ ssi $(a, b) \in R$ et $(c, d) \in S$.

1. Montrer que si R et S sont des relations d'ordre sur les ensembles A et B, La relation $R \times S$ est une relation d'ordre sur $A \times B$. On montre ainsi que le produit de deux posets est un poset.
2. Sous quelle condition est-il vrai que le produit de $(\mathrm{Div}(n), |)$ et $(\mathrm{Div}(m), |)$ a la même structure que $(\mathrm{Div}(nm), |)$? (Donner une démonstration de votre réponse.)