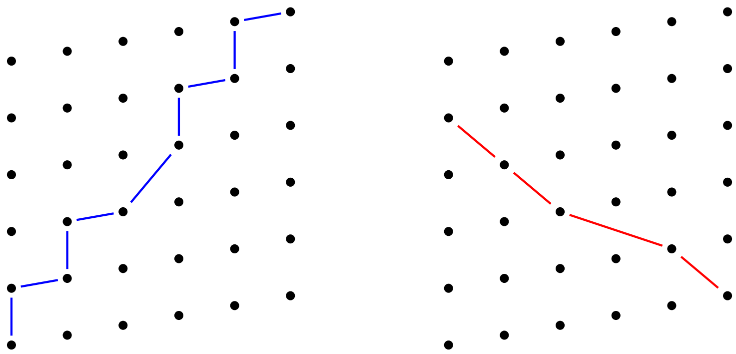
Exercice 7.1. Montrer que la largeur de $\mathcal{B}_5$ est 10 en trouvant une décomposition en chaînes de $P(\underline{5})$ de taille 10 et une antichaîne de longueur 10.

Exercice 7.2. Soit n un entier. Trouver la largeur du poset $(\underline{n}, |)$.

Exercice 7.3. Montrer que si $\mathcal{P}$ est un poset de $ab + 1$ éléments, où a et b sont des entiers, alors $\mathcal{P}$ contient une chaîne de longueur $a + 1$ ou une antichaîne de longueur $b + 1$.

Exercice 7.4. Soit n points du plan $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ tels que tous les x_i et tous les x_j soient distincts. Un *chemin polygonal de pente positive* sur les points est un chemin qui connecte certains points entre eux par des segments de pente positive. On définit de même un *chemin polygonal de pente négative*. Un exemple est donné sur la figure plus bas. Montrer que si $n = ab + 1$, alors il existe soit un chemin polygonal de pente positive et de longueur $a + 1$, soit un chemin polygonal de pente négative et de longueur $b + 1$.



(a) Pente positive (b) Pente négative

Exercice 7.5. Montrer le "dual" du théorème de Dilworth : Si $\mathcal{P}$ est un poset, alors le nombre minimal d'antichaînes disjointes qui recouvrent $\mathcal{P}$ est égal à la taille de la plus grande chaîne de $\mathcal{P}$.