Correction.

Exercice 8.1. Supposons G non connexe et montrons que son complèmentaire l'est en montrant que $\forall v_1, v_2 \in V$ il existe un chemin de v_1 à v_2.

- Si v_1 et v_2 ne sont pas dans la même composante connexe, il sont voisins dans $\overline{G}$.
- Sinon, comme G n'est pas connexe il existe un sommet v_3 de G qui n'est pas dans la même composante connexe que v_1 et v_2. On en déduit alors que (v_1, v_3) et (v_3, v_2) sont des arêtes de $\overline{G}$ qui forment un chemin de v_1 à v_2.

Exercice 8.2. Par l'absurde, si G n'est pas connexe, il existe une composante connexe de taille au plus $\lfloor n/2 \rfloor$. Un sommet de cette composante est donc de degré au plus $\lfloor n/2 \rfloor$-1, c'est-à-dire $< \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ d'où le résultat.

Exercice 8.3. On peut supposer sans perte de généralité que G est connexe. En effet, aussi bien pour la propriété d'être biparti que celle d'existence de cycle impair on peut montrer que G a la proprieté ssi chacune de ses composantes connexes l'a. Montrons donc les deux sens de l'équivalence indépendament pour un graphe connexe :

- Il existe un cycle impair $\Rightarrow G$ non biparti :
  Pour un tel cycle $v_1 - \cdots - v_{2p+1} - v_1$, on peut montrer par récurrence en partant de v_1 que tous les v_i pour i impair sont du même côté dans le graphe biparti ce qui est une contradiction car v_{2p+1} et v_1 sont voisins.
- Aucun cycle impair $\Rightarrow G = (V, E)$ biparti :
  Prenons un sommet v de G, et notons V_i l'ensemble des sommets à distance i de v. C'est-à-dire que la taille du plus court chemin entre v et les éléments de V_i est i. On pose alors $A = \{V_i, i \text{ pair}\}$ et $B = V - A$. Le graphe G est alors biparti pour cette décomposition ssi pour tout i il n'y a aucune arête entre les sommets de V_i.
  Supposons que ce ne soit pas le cas et qu'il existe $a, b \in V_i$ avec $(a, b) \in E$. Soit alors c_1 un chemin de v à a de longueur i et c_2 un chemin de v à b de longueur i. Notons u le sommet commun entre c_1 et c_2 le plus près de a (il peut s'agir de v). En empruntant le sous-chemin de c_1 qui va de u à a, puis l'arête (a, b) et le sous-chemin de c_2 qui va de b à u on obtient un cycle entre les trois points a, b et u. De plus ce cycle est de longueur impaire car la distance entre u et a est la même que celle entre u et b (sinon c_1 et c_2 n'auraient pas la même longueur). C'est une contradiction.

Exercice 8.4. Soit v un sommet de G, regardons l'ensemble A de ses voisins à distance inférieure à i. S'ils sont tous différents, on a clairement $|A| = 1+d+d(d-1)+\cdots+d(d-1)^{i-1}$. En particulier si $1+d+\cdots+d(d-1)^{i-1} \geq n$, au moins deux éléments de A sont égaux, et il existe un cycle de taille au plus $2i$. Soit l le plus petit entier tel que $(d-1)^l \geq n$. Comme $1 + d + \cdots + d(d-1)^{i-1} \geq (d-1)^i$, la taille du plus petit cycle de G est inférieure ou égale à $2l$. On en déduit que la taille du plus petit cycle est inférieure à $2\lceil \log_{d-1}(n) \rceil$.

Exercice 8.5. On va montrer la contraposé, c'est-à-dire que si G n'a pas de triangle, il ne peut avoir trop d'arêtes. L'idée est de remarquer que pour deux sommets adjacents u et v, s'il n'y a pas de triangle, $\deg(u) + \deg(v) \leq n$. En sommant cette relation sur toutes les arêtes, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)^2 \leq nm$$

avec m le nombre d'arêtes. En effet, en sommant sur les arêtes, un sommet v_i de G apparaît autant de fois que son degré. Comme sa contribution est de $\deg(v_i)$ par arêtes, on obtient le $\deg(v_i)^2$. On sait aussi que $2m = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)$. En utilisant Cauchy-Schwarz (cf feuille exos 11) pour minorer la somme des carrés, on en déduit que $(2m)^2/n \leq nm$. Ou encore que $m \leq n^2/4$.

Exercice 8.6. Comme on s'interesse uniquement au cardinal de l'ensemble, on peut supposer sans perte de généralité que tous les a_i sont positifs. En ordonnant les éléments de l'ensemble $\{-1, 1\}^n$ par $\varepsilon \leq \mu$ ssi $\varepsilon_i \leq \mu_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on se rend compte que l'ensemble que l'on cherche forme une antichaîne. En effet pour $\varepsilon < \mu$, en notant D l'ensemble des positions ou ils diffèrent, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i + 2\sum_{i \in D} a_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i \ .$$

Donc si D est non vide, la différence entre ces deux sommes est de valeur absolue strictement plus grande que 2 (car $|a_i| > 1$ pour tout i). C'est à dire que ε et μ ne peuvent tout deux appartenir à l'ensemble recherché.

Il faut ensuite remarquer que notre poset sur $\{-1, 1\}^n$ est en fait identique à B_n. Une application directe du théorème de Dilworth vu en cours nous donne alors directement l'inégalité car il nous montre qu'une antichaîne d'un tel poset est de cardinal $\leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Un cas d'égalité est obtenue pour n pair et tout les a_i de même valeur absolue. En effet, dans ce cas l'ensemble solution est clairement en bijection avec les parties à $n/2$ éléments de $\underline{n}$.