Les problèmes avec une étoile $(^\star)$ ne seront pas noté.

Exercice 8.1. Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\overline{G} = (V, E^c)$ ou le complémentaire de E est pris dans $V \times V$. Montrer que si un graphe n'est pas connexe alors son complémentaire est connexe.

Exercice 8.2. Soit G un graphe sur n sommets tel que chaque sommet soit de degré au moins $\lceil (n-1)/2 \rceil$. Montrer que G est connexe.

Exercice 8.3. Montrer qu'un graphe est biparti ssi il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Exercice 8.4. Soit $d \geq 3$, montrer que la taille du plus petit cycle contenu dans un graphe d-régulier sur n sommets ne peut dépasser $c \log_{d-1}(n)$ pour une certaine constante c.

Exercice 8.5. $(^\star)$ Soit G un graphe avec n sommets et m arêtes tel que $m > n^2/4$. Montrer que G contient un triangle (un cycle de longueur 3).

Exercice 8.6. $(^\star)$ (Problème de Littlewood-Offord) Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels avec $|a_i| > 1$ pour tout i. Soit

$$e(a_1, \ldots, a_n) := \# \left\{ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \mid -1 < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i < 1 \right\} .$$

Montrer que $e(a_1, \ldots, a_n) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Donner un exemple pour lequel il y a égalité.