Chapitre 3
Relations

Les relations sont l'une des notions les plus fondamentales associée aux ensembles. Tout le monde a une compréhension intuitive d'une relation : par exemple, si A est l'ensemble de tous les êtres vivants, alors la relation C ("être le fils de") peut être définie sur les éléments de cet ensemble. On dit que deux êtres humains a et b dans A sont lié par cette relation si b est le fils de a, et l'on note $a \sim_C b$. Dans ce cas, l'ordre est important, ainsi $a \sim_C b$ et $b \sim_C a$ sont incompatible. Un autre exemple est donné par l'ensemble des entiers et la relation D (pour "divisibilité"), où $a \sim_D b$ si b divise a.

Notre compréhension intuitive d'une relation est rendue formelle dans ce chapitre. De plus, on discutera des différents type de relations et de leur représentation comme graphes orientés et matrices booléennes.

3.1. Relations

Définition 3.1. Une relation R entre les ensembles A et B est un sous ensemble de $A \times B$:

$$R \subseteq A \times B.$$

On dit que $a \in A$ et $b \in B$ sont lié par R, ce qui se note $a \sim_R b$, si $(a, b) \in R$. Le *domaine* $\mathrm{Dom}(R)$ est l'ensemble de tous les éléments de A qui sont en relation avec certains éléments de B :

$$\mathrm{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B \colon a \sim_R b\}.$$

L'*image* (ici *range* en anglais) $\mathrm{Ran}(R)$ est l'ensemble de tous les éléments de B qui sont en relation avec certains éléments de A :

$$\mathrm{Ran}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A \colon a \sim_R b\}.$$

Exemple 3.2.

1. Soit A l'ensemble des professeurs de l'EPFL, et B l'ensemble des cours donnés à l'EPFL ce semestre. La relation $R = \{(a, b) \mid a \text{ enseigne le cours } b\}$ décrit le lien entre les cours et les professeurs. $\mathrm{Dom}(R)$ est l'ensemble des tous les professeurs qui donne un cour ce semestre. L'image $\mathrm{Ran}(R)$ est égale à B.
2. Soit $A = \mathbb{Z}$ et $B = \{0, 1\}$. Soit l'ensemble $R \subseteq A \times B$ définie comme l'ensemble de tous les couples (a, b) tels que $b = 1$ si a est un nombre premier, et 0 si a est composé d'exactement deux facteurs premiers distincts. Ainsi, par exemple, $(5, 1) \in R$, mais $(7, 0)$, $(6, 1)$ et $(30, 0)$ ne sont pas dans R. Alors $\mathrm{Dom}(R)$ est l'ensemble des entiers qui ont au plus 2 facteurs premiers, et $\mathrm{Ran}(R)$ est $\{0, 1\}$.
3. Soit A l'ensemble de tout les entiers naturels, et B l'ensemble de tout les sous-ensembles finis de A. La relation $R = \{(a, b) \in A \times B \mid a = \sum_{x \in b} x\}$ représente les partions de a comme une somme d'entiers naturels distincts. Alors $\mathrm{Dom}(R) = A$, et $\mathrm{Ran}(R) = B$.

$\diamond$

Très souvent dans ce cours, nous considérerons des relations définies sur un seul ensemble.

Définition 3.3. Soit $R \subseteq A \times A$ une relation

(1) R est dite *symétrique* si $(a, b) \in R$ implique $(b, a) \in R$.

(2) R est dite *réflexive* si $(a, a) \in R$ pour tous $a \in A$.

(3) R est dite *transitive* si

$$\forall a, b, c \in A \colon (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R.$$

(4) R est une *relation d'équivalence* si elle est symétrique, réflexive et transitive.

Exemple 3.4.

1. Supposons que A est l'ensemble de tout les humains. L'ensemble $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a$ est marié à b$\}$ décrit la relation "être marié". Il s'agit d'une relation symétrique mais pas réflexive. Que signifie la transitivité pour cette relation ?
2. L'ensemble $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leq b\}$ décrit la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$. Elle n'est pas symétrique, mais elle est réflexive et transitive.
3. Formalisons la relation sur les entiers donnée par " m divise n ". Pour cela, considérons, $A = B = \mathbb{Z}$, et $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m$ divise $n\}$. Cette relation n'est toujours pas symétrique, mais elle est réflexive et transitive.
4. Prenons encore $A = B = \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers, et $m \in \mathbb{Z}$. La relation de "congruence" $\equiv$ est définie par $R_m = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m$ divise $a - b\}$. On écrit $a \equiv b \mod m$ si $(a, b) \in R_m$. Cette fois, il s'agit d'une relation d'équivalence. En effet, $(a, a) \in R_m$, car m divise $a - a = 0$. Ensuite, si m divise $a - b$, il divise aussi $b - a$, est donc R_m est réflexive. Finalement, supposons que $(a, b) \in R_m$ et $(b, c) \in R_m$. Alors m divise $a - b$ et divise aussi $b - c$, il doit donc diviser la somme de ces nombres, c'est à dire $a - c$. On en déduit $(a, c) \in R_m$ et la transitivité de R_m.
5. Soit V un espace vectoriel sur un corps K, et soit U un sous-espace vectoriel de V. On peut définir une relation de congruence sur $V \times V$ par $R_U := \{(a, b) \in V \times V \mid a - b \in U\}$. On dit que $a \equiv b \mod U$ si $(a, b) \in R_U$. Cette relation est aussi une relation d'équivalence. En effet, U est un sous-espace, il contient donc l'élément 0, et pour tout élément a, il contient aussi son opposé $-a$. Ainsi, $(a, a) \in R_U$, et si $(a, b) \in R_U$, alors on a aussi $(b, a) \in R_U$, ce qui montre que R_U est à la fois réflexive et symétrique. Si (a, b) et (b, c) sont dans R_U, alors $a - b$ et $b - c$ sont dans U. Et comme U est un sous-espace, il contient $a - b$ et $b - c$ et leur somme, c'est à dire $a - c \in U$ et $(a, c) \in R_U$. Finalement U est bien transitive.
6. Soit $A = \mathbb{R}$, et $R = \{(a, b) \mid b^2 = a\}$. Alors R n'est ni symétrique, ni réflexive, ni transitive.
7. Soit A l'ensemble de tous les polynômes à une variable et à coefficients entiers. On définit la relation R sur A par $(a, b) \in R$ ssi $\deg(a) = \deg(b)$. C'est une relation d'équivalence (preuve laissé en exercice).

$\diamond$

Définition 3.5. Soit R une relation sur $A \times B$. Alors, pour tout $a \in A$, l'ensemble

$$[a] := \{b \in B \mid (a, b) \in R\}$$

est appelé la *classe* de a.

Exemple 3.6. Soit A L'ensemble $\{$Lundi, Mardi, Mercredi, Jeudi, Vendredi$\}$ et B l'ensemble $\{$Analyse, Mathématiques numériques, Théorie des probabilités, Mathématiques discrètes$\}$. Considérons la table suivante :

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
Analyse	$\times$		$\times$		
Mathématiques numériques		$\times$		$\times$	
Théorie des probabilités		$\times$			$\times$
Mathématiques discrètes				$\times$	

Cette table définie deux relations, l'une, appelons la R, sur $A \times B$, et l'autre, appelons la R', sur $B \times A$. Ces relations sont définies de manière évidentes : $(a, b) \in R$ ssi il y a une croix dans la case correspondante à l'intersection de la ligne correspondant à a et de la colonne correspondant à b. Ainsi, [Théorie de probabilité] $= \{$Mardi, Vendredi$\}$. De manière similaire, $(b, a) \in R'$ ssi $(a, b) \in R$. Ainsi, par exemple, [Mercredi] $= \{$Analyse$\}$. $\diamond$

Les classe d'une relation d'équivalence ont des propriétés intéressantes : Deux telles classes sont soit disjointes (c'est à dire d'intersection vide), soit égale. Ce résultat, qui est montré plus bas, n'est en général pas vrai pour les relations. Ainsi, dans l'exemple précédent, [Théorie des probabilité] et [Mathématiques numériques] ont une intersection non vide $\{$Mardi$\}$ et ne sont pas égale.

Exemple 3.7. Considérons la relation de congruence R_m définie dans l'exemple 3.4(4). Alors, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $[a] = \{a + mz \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Si $a \equiv b \bmod m$, alors $a - b$ est divisible par m, disons $a - b = zm$, et donc $a = b + zm$, de telle manière que $a \in [b]$. Puisque $b = a - zm$, $b \in [a]$ et donc $[a] = [b]$. D'un autre côté, si $a \not\equiv b \bmod m$, alors $[a]$ et $[b]$ sont disjointe : sinon, si $x = a + zm = b + z'm$, alors $a - b = (z' - z)m$, et donc $a \equiv b \bmod m$, une contradiction. Il se trouve que les classes distinctes sont dans ce cas $[0], [1], \ldots, [m - 1]$. $\diamond$

Pour prouver le résultat que nous venons de mentionner sur les relations d'équivalences nous avons besoin d'une définition :

Définition 3.8. Soit S un ensemble. Une *partition* de S est une collection $\Pi = \{S_1, \ldots, S_t\}$ telle que

(1) Pour tout $i = 1, \ldots, t$: $S_i \neq \emptyset$.

(2) Pour tout i, j avec $i \neq j$ on a $S_i \cap S_j = \emptyset$.

(3) $S = \cup_{i=1}^{t} S_i$.

Proposition 3.9. *Soit R une relation d'équivalence sur A.*

(1) *Si $a \sim_R b$, alors $[a] = [b]$.*

(2) *Si $a \not\sim_R b$, alors $[a] \cap [b] = \emptyset$.*

(3) *Les ensembles distincts parmi les classes $[a]$ pour $a \in A$ forme une partition de A.*

Démonstration. (1) Si $a \sim_R b$, alors $b \in [a]$, et par symétrie on a aussi $a \in [b]$. Si $x \in [a]$, alors $x \sim_R a$ et comme $a \sim_R b$, par transitivité, on a $x \sim_R b$. Finalement, $[a] \subseteq [b]$. Par symétrie l'autre inclusion se montre de manière similaire et $[a] = [b]$.

(2) Supposons que $a \not\sim_R b$ et qu'il existe $x \in [a] \cap [b]$. Alors $x \sim_R a$ et $x \sim_R b$. par symétrie, $a \sim_R x$, et par transitivité, $a \sim_R x$ et $x \sim_R b$ implique $a \sim_R b$, et donc $[a] = [b]$, ce qui est une contradiction.

(3) Soit $I \subseteq A$ tel que les classes $[a]$, $a \in I$ sont toutes distinctes, et représentent toutes les classes de R. (I est appelé un ensemble de représentant de classe.) On prouve d'abord que $A = \cup_{a \in I} [a]$. Soit $x \in A$. Alors, comme $(x, x) \in R$ par symétrie, $x \in [x]$, ce qui montre l'assertion. Comme par (2) les classes $[a]$ et $[b]$ pour $a, b \in I$, $a \neq b$, sont disjointe, on voit que $\{[a] \mid a \in I\}$ forment une partition de A. $\square$

Définition 3.10. Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble A. Alors tout sous-ensemble $I \subseteq A$ tel que les classes $[a]$, $a \in I$ forme une partition de A est appelée *un ensemble de représentant de classe* pour R.

Les relations d'équivalence sont les mêmes objets que les partitions comme le montre le théorème suivant.

Théoréme 3.11. *Soit A un ensemble. Il y a une bijection entre les relations d'équivalence sur A et les partitions de A.*

Démonstration. Soit L l'ensemble de toutes les relations sur A, et P l'ensemble de toutes les partitions de A. Définissons l'application $f \colon L \to P$ par $f(R) = \{[a] \mid a \in I\}$, où I est un ensemble de représentants des classes de R. Si on peut trouver une application $g \colon P \to L$ telle que $g(f(R)) = R$ pour tout $R \in L$ et $f(g(\Pi)) = \Pi$ pour tout $\Pi \in P$, alors d'après l'exercice 2.1 on vient de montrer la bijectivité de f.

Soit $\Pi = \{A_1, \ldots, A_t\}$ une partition de A. On définit la relation $g(\Pi) = R_\Pi$ par

$$a \sim_{R_\Pi} b \iff \exists i \colon a \in A_i \wedge b \in A_i.$$

En d'autre mots, a et lié à b si tout deux sont dans le même ensemble de la partition. On affirme que R_Π est une relation d'équivalence. La symétrie et la réflexivité étant facile à voir on va se concentrer sur la transitivité. Supposons que $(a, b) \in R_\Pi$ et $(b, c) \in R_\Pi$. Alors il existe un i tel que $a, b \in A_i$ et il existe un j tel que $b, c \in A_j$.

Puisque $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ (Cela découle de la définition d'une partition), on en déduit $i = j$, et donc $(a, c) \in R_\Pi$. On définit $g(\Pi) = R_\Pi$.

Remarquez que les classes de R_Π sont par définition précisément les ensembles A_i, et donc $f(g(\Pi)) = \Pi$. D'un autre côté, si R est une relation d'équivalence, et que $\Pi = f(R)$ est l'ensemble des classe distinctes de R, alors $g(\Pi) = R$, ce dont on peut se convaincre après une courte réflexion. $\square$

Si $R \subseteq A \times A$ est une relation sur l'ensemble A, alors l'ensemble des classes distinctes de R a un nom particulier.

Définition 3.12. Soit A un ensemble et $R \subseteq A \times A$ une relation d'équivalence sur A. Alors l'ensemble des classes de R est noté A/R et est appelé l'ensemble quotient de A par rapport à R.

Exemple 3.13. Soit $A = \mathbb{Z}$, n un entier non nul, et R_m la relation de congruence définie dans l'exercice 3.4 (4). Alors $\mathbb{Z}/R_m$ est formé des m éléments $\{i + m\ell \mid m \in \mathbb{Z}\}$ pour $i = 0, 1, \ldots, m - 1$. L'ensemble $\mathbb{Z}/R_m$ et usuellement noté $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans la littérature.

3.2. Relations sur les ensembles finis

Supposons que A et B sont des ensembles fini et que $R \subseteq A \times B$ est une relation. Dans cette section on va voir plusieurs façons de représenter R.

La manière la plus simple pour représenter R est simplement de lister ses éléments.

Exemple 3.14. Soit $A = \{0, 1, 2\}$. On définit la relation R sur $A \times A$ tel que $a \sim_R b$ ssi $a + b \equiv 0 \mod 3$. Alors $R = \{(0, 0), (1, 2), (2, 1)\}$. $\diamond$

Une seconde manière de représenter $R \subseteq A \times B$ est à l'aide d'une matrice d'éléments de l'ensemble $\{0, 1\}$. On considère ainsi une matrice avec $|A|$ lignes et $|B|$ colonnes. Les lignes sont indexées par les éléments de A et les colonnes par ceux de B. Si $(a, b) \in R$, alors on met un 1 à la position indexé par la ligne a et la colonne b. On met sur toute les autres positions un 0.

Exemple 3.15. La matrice de la relation de l'exemple 3.6 est la suivante :

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
Analyse	1	0	1	0	0
Mathématiques Numériques	0	1	0	1	0
Théorie des probabilités	0	1	0	0	1
Mathématiques discrètes	0	0	0	1	0

et la matrice de l'exercice précédent est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\diamond$

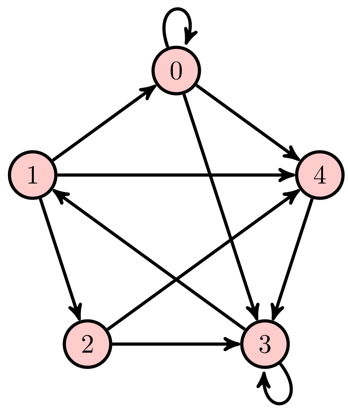
Une troisième façon de représenter une relation est à l'aide d'un graphe orienté.

Définition 3.16. Un *graphe orienté* est une paire $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini, et $E \subseteq V \times V$. L'ensemble V est appelé l'ensemble des *sommets* de G, et E est appelé l'ensemble des *arêtes* de G. Si E est symétrique, c'est à dire que pour tout $a, b \in V$ on a $(a, b) \in E \iff (b, a) \in E$, alors G est appelé un graphe *non-orienté* ou simplement un graphe.

Il est clair qu'un relation sur un ensemble fini est la même chose qu'un graphe orienté et qu'une relation symétrique corresponds à un graphe non-orienté. Un des avantages de travailler avec les graphes et que l'on peut les dessiner. Pour cela, on dessine pour chaque éléments de l'ensemble de base un *nœud* dans le plan étiqueté par cet élément. Puis, on dessine une arête depuis un nœud d'étiquette a vers un nœud d'étiquette b si $a \sim_R b$.

Exemple 3.17. Soit $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et R une relation dont la matrice est donné sur la partie gauche de la figure ci-dessous. Le graphe orienté correspondant est donné sur la partie droite.

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
2	0	0	0	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0

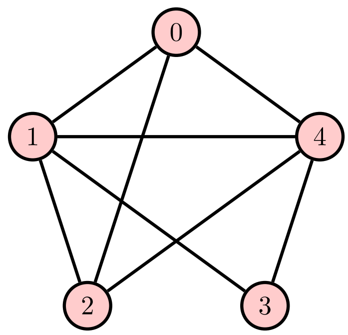


◇

Si une relation est symétrique, alors on omet les flèches sur les arêtes.

Exemple 3.18. Soit $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et R une relation dont la matrice est donné sur la partie gauche de la figure ci-dessous. Le graphe correspondant est donné sur la partie droite.

	0	1	2	3	4
0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
2	1	1	0	0	1
3	0	1	0	0	1
4	1	1	1	1	0

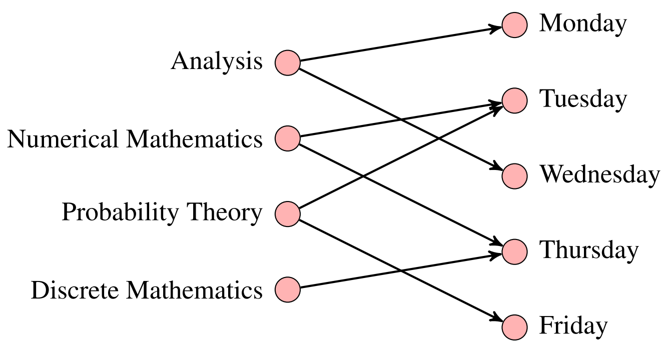


◇

Les relations entre ensembles différents peuvent être aussi représenté par des graphes.

Définition 3.19. Un *graphe biparti* $G = (A \sqcup B, E)$ est un graphe dans lequel l'ensemble des sommets est une union disjointe de deux ensemble A et B, et tel que l'ensemble des arêtes E est un sous-ensemble de $A \times B$. Si E est symétrique, c'est à dire si $(a, b) \in E \iff (b, a) \in E$, alors G est appelé un *graphe biparti non-orienté* ou simplement un graphe biparti.

Exemple 3.20. Le graphe biparti correspondant à la relation de l'exercice 3.14 est donné ci-dessous.



◇

3.3. Opérations sur les relations

La première opération que nous considérons est celle de composition.

Définition 3.21. Soit $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$ des relations. La composition $S \circ R$ de R et S est définie comme la relation de $A \times C$ qui vérifie

$$S \circ R := \{(a, c) \mid \exists b \in B \colon (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$

Voici un exemple.

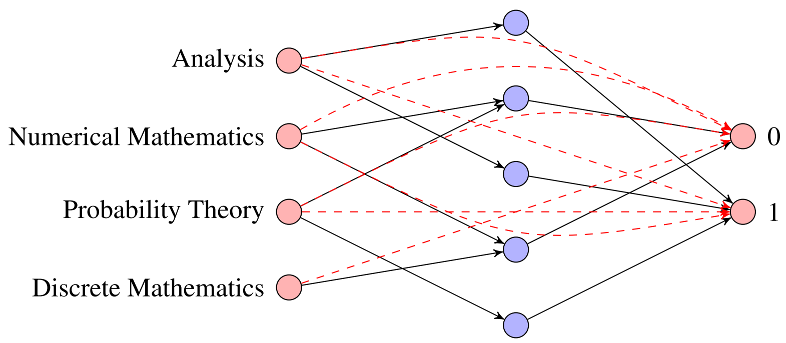
Exemple 3.22. Soit R la relation de l'exemple 3.6 et S la relation sur $B \times C$ où C est l'ensemble $\{0, 1\}$ et la relation est définie par

$$S = \{(\text{Lundi}, 1), (\text{Mardi}, 0), (\text{Mercredi}, 1), (\text{Jeudi}, 0), (\text{Vendredi}, 1)\}.$$

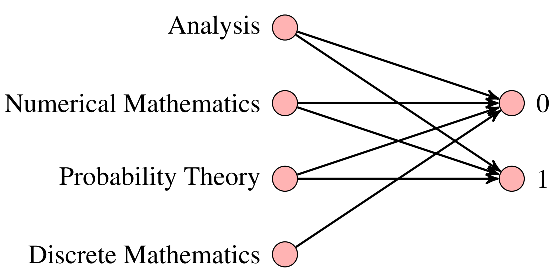
Alors $S \circ R$ est donné sous forme matricielle par

	0	1
Analyse	0	1
Mathématique numériques	1	0
Théorie des probabilités	1	1
Mathématiques discrètes	1	0

La composition de ces deux relations (et en général de n'importe quelle relations) peut être facilement visualisée en terme de graphe biparti. Dans un premier temps, on concatène les deux graphes biparti de chacune des relations en identifiant les nœuds qui correspondent au élément de B. On connecte ensuite les nœuds de A aux nœuds de C pour lequel il y a un chemin entre ces deux sommets passant par un sommet de B :



Cela nous donne à la fin le graphe biparti suivant pour $S \circ R$:



◇

Pour une relation sur un seul ensemble, la notion de composition est légèrement plus simple.

Définition 3.23. Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.

- Un chemin de longueur m de la relation R est un ensemble d'éléments $c_0, \ldots, c_m$ tels que $c_0 \sim_R c_1 \sim_R c_2 \sim_R \cdots \sim_R c_m$. On dit qu'il s'agit d'un chemin entre c_0 et c_m.

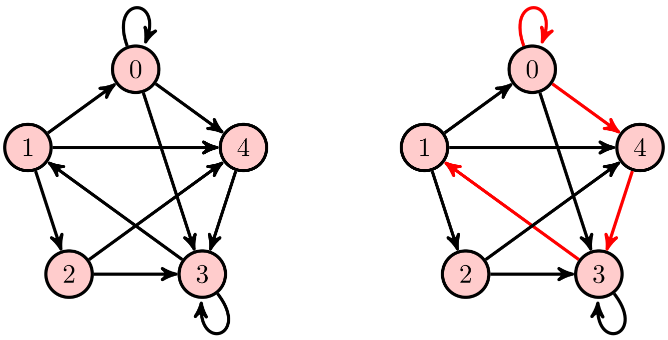
– On définit R^m comme $\underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{m \text{ fois}}$.

La preuve de la remarque suivante est triviale.

Remarque 3.24. *Soit $R \subseteq A \times A$ une relation, et G le graphe orienté correspondant. Alors $(a, b) \in R^m$ ssi il y a un chemin de longueur m entre a et b dans G.*

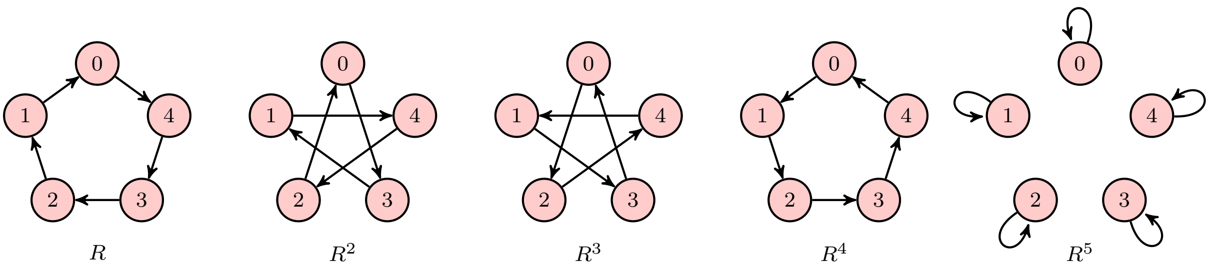
Exemple 3.25.

(1) Supposons que R est une relation dont le graphe orienté est donné sur la partie gauche de la figure suivante. Alors un chemin de longueur 4 de cette relation est donné sur la partie droite.



R un chemin de longueur 4 dans R

(2) Supposons que R est une relation sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ donnée par $R = \{(1, 0), (0, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)\}$. Le graphe orienté pour cette relation et ses puissances $R^2, \ldots, R^5$ est donné ci-dessous :



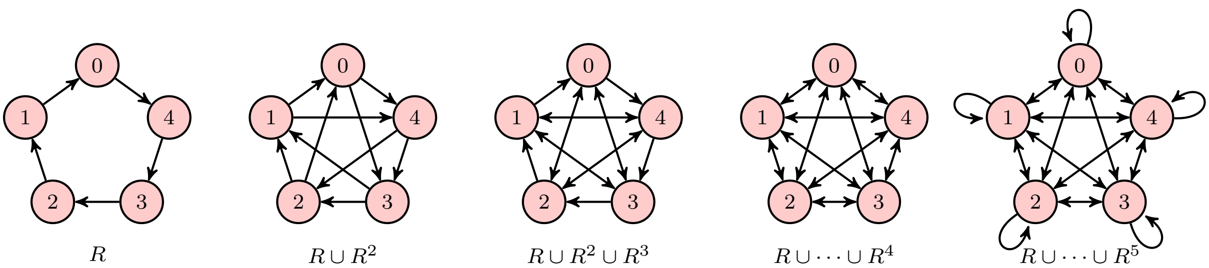
R R^2 R^3 R^4 R^5

◇

Définition 3.26. Soit $R \subseteq A \times A$ Une relation. La *fermeture transitive* de R, notée $\overline{R}$, est définie par

$$\overline{R} := \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i.$$

Exemple 3.27. Soit R la relation de l'exemple 3.25 (2). On a alors le résultat suivant :



R $R \cup R^2$ $R \cup R^2 \cup R^3$ $R \cup \cdots \cup R^4$ $R \cup \cdots \cup R^5$

◇

L'exemple précédent est une illustration typique de ce qui se passe pour les relations sur un ensemble *fini* : La séquence $R, R \cup R^2, R \cup R^2 \cup R^3, \ldots$ se stabilise toujours, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3.28. *Si A est un ensemble fini, et R est une relation sur A, alors il existe un certain m tel que $\overline{R} = R \cup \ldots \cup R^m$.*

Démonstration. Soit $|A| = n$ et $a, b \in A$. On va montrer que s'il existe un chemin de longueur m entre a et b dans R, alors il existe un chemin de longueur au plus $n-1$ dans R entre a et b. Cela montre que $\overline{R} = \bigcup_{i=1}^{n-1} R^i$.

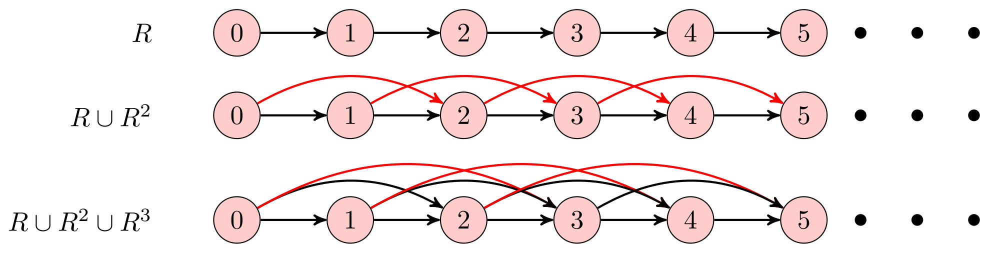
Pour cela, soit $a =: c_0 \sim_R c_1 \sim_R \cdots \sim_R c_{m-1} \sim_R b =: c_m$ un chemin de longueur m entre a et b. Supposons de plus que ce chemin est de longueur minimale. Si $m \geq n$, alors, il existe deux indices différents, notons les i et j, tel que $c_i = c_j$. En effet, il y a dans ce cas plus de n éléments de A qui participe au chemin et donc tous les éléments du chemin ne peuvent être distincts.

On peut supposer sans perte de généralité que $i < j$. En enlevant les éléments $c_{i+1}, \ldots, c_j$ du chemin, on obtient maintenant un nouveau chemin de a vers b :

$$c_0 \sim_R \cdots \sim_R c_i \sim_R c_{j+1} \sim_R \cdots c_m.$$

Ce chemin est de longueur plus courte que l'original ce qui contredit l'hypothèse de la minimalité de la longueur. Finalement, on en déduit que la longueur d'un chemin minimal est d'au plus n ce qui termine la démonstration. □

Exemple 3.29. L'assertion de la proposition 3.28 n'est pas vrai pour les ensembles infinis. Par exemple, regardons la relation R sur $\mathbb{N}_0$ définie par $R = \{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{N}_0\}$. Alors, $R^2 = \{(a, a+2) \mid a \in \mathbb{N}_0\}$, et de manière générale, $R^m = \{(a, a+m) \mid a \in \mathbb{N}_0\}$. Les graphes dirigés correspondants aux relations R, $R \cup R^2$ et $R \cup R^2 \cup R^3$ sont donnés ci-dessous.

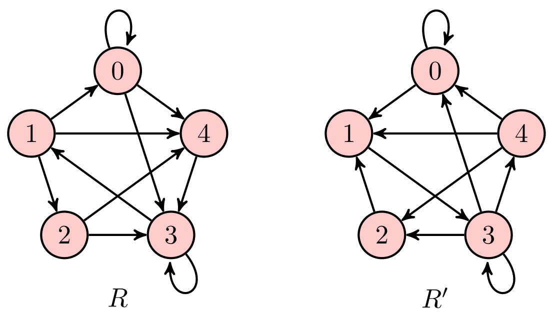


D'un autre côté, $\overline{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}_0 \wedge a < b\}$, et il n'existe pas de m tel que $\overline{R} = \bigcup_{i=1}^{m} R^i$. ◇

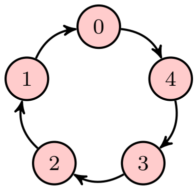
Définition 3.30. Soit $R \subseteq A \times A$ une relation.
- La relation $R' := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ est appelé la relation *inverse* de R.
- La relation $\mathrm{Sym}(R) := R \cup R'$ est appelé la relation *symétrisée* de R.

Exemple 3.31.

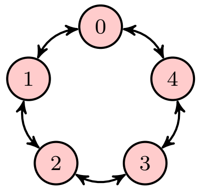
(1) Supposons que R est une relation sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ donnée par le graphe de gauche sur le dessin suivant. Le graphe orienté de la relation inverse est donné sur la droite :



(2) Supposons que R est une relation sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ donnée par $R = \{(1, 0), (0, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)\}$. La relation R et sa symétrisée sont données ci-dessous :

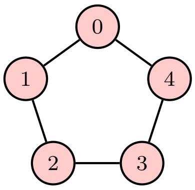


R



$\mathrm{Sym}(R)$

=



◇