

Chapitre 5

Théorie élémentaire des graphes

5.1. Les sept ponts de Königsberg

Au 18^{ème} siècle, la ville de Königsberg en Prusse (maintenant Kaliningrad en Russie) qui se situe sur la rivière Pregel (Pregolya en Russe), contenait deux îles qui étaient connectées entre elles et aux berges par sept ponts comme indiqué sur la figure 1 : A et B correspondent aux îles alors que C et D correspondent aux deux berges. Un problème fut posé dont la solution échappait aux mathématiciens de l'époque : est-il possible de trouver un chemin dans la ville qui passe par chacun de ces sept ponts exactement une fois ? Malgré de nombreux essais, aucune solution de ce problème n'a pu être trouvée. Serait-il possible qu'il n'y ait pas de solution, et si oui, comment quelqu'un pourrait-il le prouver ? Il est facile de convaincre quelqu'un de l'existence d'une solution juste en la lui donnant. Mais comment convaincre des mathématiciens qu'une solution n'existe pas ?

Le mathématicien Suisse Léonard Euler fut parmi ceux qui s'intéressèrent au problème, et trouva une méthode ingénieuse pour prouver qu'il n'y avait pas de solutions. De plus, la preuve qu'il publia en 1735 à l'académie de St.Petersbourg marque la naissance d'un domaine important des mathématiques, celui de la théorie des graphes et de la topologie.

Une des clefs de la preuve d'Euler est l'abstraction du problème : la taille des îles n'est pas importante ; ce qui est important c'est comment elles sont reliées entre elles et aux berges. Dans la terminologie d'aujourd'hui, Euler a introduit le concept de graphe avec des arêtes multiples.

Définition 5.1. Un *multigraphe* est un graphe $G = (V, E)$ avec une application $E \rightarrow \mathbb{N}$ appelée *fonction de multiplicité* qui associe à chaque arête un entier positif, sa *multiplicité*. Ce nombre représente le *nombre d'arêtes* entre les deux sommets ainsi reliés. Dans cette terminologie, un graphe est un multigraphe pour lequel la multiplicité de chaque arête vaut 1. Un graphe est parfois appelé un *graphe simple*.

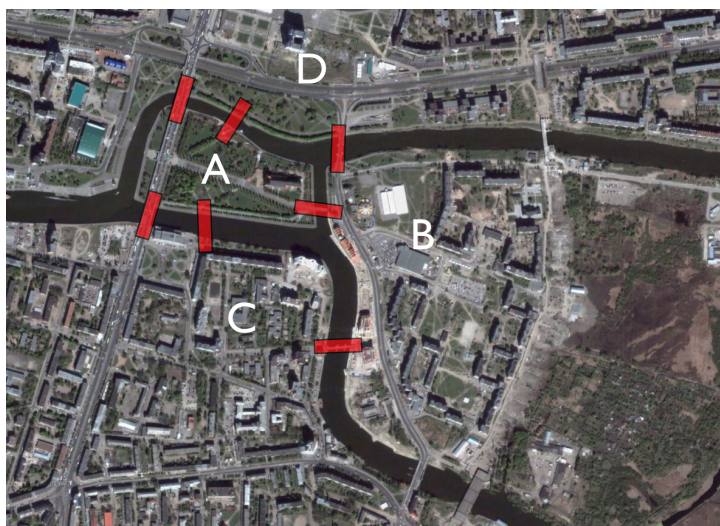
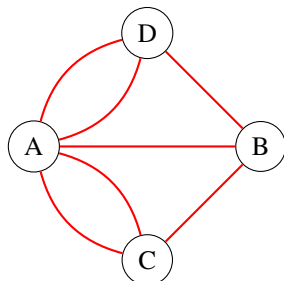


Figure 5.1 – Photographie satellite de la ville de Kaliningrad en Russie, autrefois Königsberg en Prusse. Les ponts sont dessinés en rouge. Notez que deux de ces ponts n'existent plus aujourd'hui et que parmi les 5 autres, seulement deux ont survécu depuis 1736. (image extraite de Google maps.)

Avec cette définition, le multigraphe associé avec le problème des ponts est le *graphe de Königsberg* donné ci-dessous :

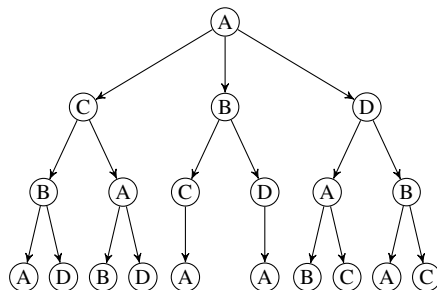


Dans la formulation en terme de multigraphes, le problème est le suivant : trouver un chemin dans le graphe de Königsberg tel que chaque arête est traversée seulement une seule fois. En honneur de Léonard Euler, un tel chemin est appelé un *chemin Eulerien*.

Définition 5.2. Soit $G = (V, E)$ un multigraphe et $f : E \rightarrow \mathbb{N}$ sa fonction de multiplicité. Un *chemin Eulerien* dans G est un chemin $a_0 - a_1 - \dots - a_m$ tel que pour tout i , (a_i, a_{i+1}) est une arête, et chaque arête apparaît dans ce chemin exactement autant de fois que sa multiplicité. Si $a_0 = a_m$, alors le chemin est appelé un *tour Eulerien*. Un graphe est dit *Eulérien* s'il admet un tour Eulerien.

Avec cette définition, le problème devient de trouver un chemin Eulerien du graphe précédent, ou montrer qu'il n'en existe pas.

Cette formulation nous permet déjà de résoudre le problème par une attaque par force brute : on peut énumérer tous les chemins possibles qui n'utilisent pas deux fois la même arête, et voir s'il n'en existe pas un de longueur 7. Par exemple, voici une liste des chemins de longueur 3 qui partent du sommet A et n'utilisent pas deux fois la même arête :



En principe, il est possible de résoudre le problème avec une telle approche. Néanmoins cette approche n'apporte rien sur la compréhension du phénomène. De plus, le mécanisme d'abstraction qui a rendu cette approche possible la rend également inefficace. En effet, maintenant que le problème est formulé en terme de multigraphe, pourquoi se restreindre au cas du graphe de Königsberg ? On peut maintenant se demander si un multigraphe arbitraire admet un chemin Eulerien, et si oui, comment le trouver. L'approche d'énumération exhaustive devient alors impraticable quand la taille du graphe augmente.

La solution d'Euler nous donne en fait une caractérisation simple des multigraphes qui contiennent un chemin Eulerien. Son idée principale est qu'en fait seulement le degré des sommets a une importance.

Définition 5.3. Dans un multigraphe G le degré d'un sommet v est la somme de la multiplicité des arêtes qui le touchent.

Ainsi, pour le graphe de Königsberg, $\deg(A) = 5$, alors que $\deg(B) = \deg(C) = \deg(D) = 3$. Le résultat d'Euler est donné dans le théorème suivant, qui montre que le graphe de Königsberg n'admet pas de chemin Eulerien.

Théorème 5.4 (Euler). *Si un multigraphe admet un chemin Eulerien alors il ne contient pas plus de deux sommets de degré impair.*

Démonstration. Supposons qu'on ait un chemin Eulerien qui part de a et arrive en b . Appelons les sommets de $V - \{a, b\}$ des *sommets internes* du chemin. Le point important est que si l'on arrive dans un sommet interne en

suivant une arête, il faut en sortir par une autre. Ainsi, le nombre d'arêtes (compté avec multiplicité) qui touche un sommet interne doit être pair. En effet un chemin Eulérien doit parcourir toutes les arêtes. Ainsi, les seuls sommets de degré impair peuvent être le départ du chemin a et l'arrivée b . \square

La preuve nous montre également que dans un multigraphe avec deux sommets de degré impair, tout chemin Eulérien doit commencer par l'un d'entre eux et finir par l'autre.

En fait, Euler affirmait (sans preuve) que la réciproque du théorème précédent est également vraie. La première preuve de la réciproque est due au mathématicien Allemand Hierholzer dans un article intitulé "Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren," publié dans le journal "Mathematische Annalen," Volume 6, pages 30–32. Dans ce théorème, on utilise la notion de graphe connexe que l'on donnera plus loin dans la définition 5.13.

Théorème 5.5 (Hierholzer). *Si un multigraphe connexe a au plus deux sommets de degré impair, il admet un chemin Eulérien.*

Nous donnerons une preuve de ce théorème pour les graphes dans la section suivante.

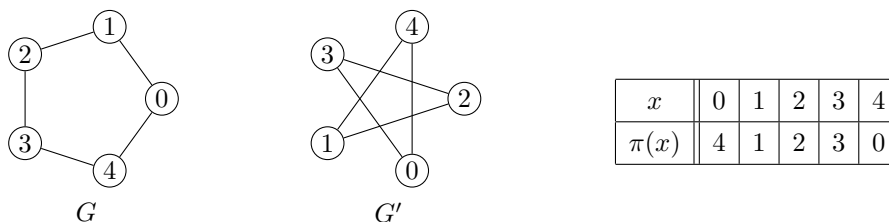
5.2. Concepts élémentaires

Dans toute cette section, on travaille avec des graphes simples et non-orientés, sauf mention du contraire. On commence notre discussion sur la théorie des graphes en formalisant l'égalité entre deux graphes.

Définition 5.6. Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont dit *isomorphe* si et seulement s'il existe une bijection $\pi : V \rightarrow V'$ telle que pour tout $a, b \in V$ on a : $(a, b) \in E \iff (\pi(a), \pi(b)) \in E'$.

En d'autres mots, deux graphes sont isomorphes si on peut passer de l'un à l'autre en renommant leur sommets.

Exemple 5.7. Les graphes G et G' sont isomorphe par l'application π donnée sur la droite.



\diamond

On continue maintenant en donnant des relations numériques entre les divers nombres associés à un graphe. Souvent, de telle formules sont plus simples si l'on n'autorise pas de boucle sur les sommets du graphe (c'est à dire une arête de la forme (a, a)).

Le premier résultat de ce type est le suivant :

Proposition 5.8. *Soit $G = (V, E)$ un graphe sans boucles, alors $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$.*

Démonstration. Quand on compte $\sum_{v \in V} \deg(v)$ chaque arête est comptée deux fois, une pour chacun des sommets qu'elle relie. Ainsi, cette somme est le double de $\sum_{e \in E} f(e)$. \square

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 5.9. *Le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair.*

Démonstration. La somme des degrés est paire d'après la proposition précédente. Un nombre impair de sommets de degré impair rendrait la somme impaire, ce qui n'est pas le cas. \square

En général, excepté cette égalité, on ne peut pas dire grand chose de plus sur la relation entre le nombre d'arêtes et de sommets d'un graphe. La seule affirmation générale est la suivante :

Proposition 5.10. *Soit n un entier positif. Alors pour tout e avec $0 \leq e \leq n(n-1)/2$ il existe un graphe sans boucle avec n sommets et e arêtes. Si $e > n(n-1)/2$ il n'existe pas de graphe sans boucles avec n sommets et e arêtes.*

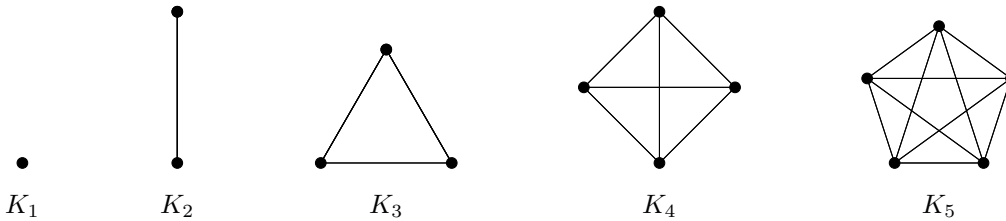
Démonstration. Comme le degré de n'importe quel sommet d'un graphe avec n sommets et sans boucle ne peut dépasser $n - 1$, la somme des degrés est d'au plus $n(n - 1)$. Ainsi, le nombre d'arêtes est d'au plus $n(n - 1)/2$. En construisant un graphe K_n pour lequel chaque sommet est relié à tous les autres et en supprimant des arêtes, on peut obtenir pour tout $e \leq n(n - 1)/2$ un graphe avec e arêtes et n sommets. \square

Le graphe que nous avons construit dans la preuve précédente a un nom. Il s'agit du *graphe complet* à n sommets.

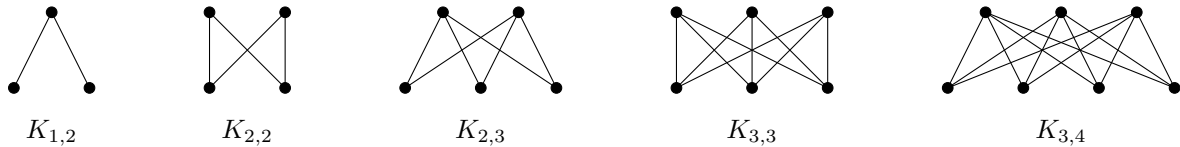
Définition 5.11. Soit n et m des entiers positifs.

1. Le graphe $G = (\underline{n}, E)$ avec $E = \{(i, j) \mid i, j \in \underline{n}\}$ est appelé le *graphe complet sur n sommets* et il est noté K_n .
2. Le graphe biparti $G = (\underline{m} \sqcup \underline{n}, E)$ avec $E = \{(i, j) \mid i \in \underline{m}, j \in \underline{n}\} \cup \{(j, i) \mid i \in \underline{m}, j \in \underline{n}\}$ est appelé le *graphe biparti complet entre m et n sommets*. On le note $K_{m,n}$.

Exemple 5.12. Voici quelques exemples de graphes complets :



Voici quelques exemples de graphe bipartis complets



\diamond

Une autre propriété des graphes qui va beaucoup nous intéresser est celle de connectivité.

Définition 5.13. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *déconnecté* si V peut être partitionné en deux ensembles disjoints et non vides T et S tels que $E \subseteq T \times T \cup S \times S$. Un graphe est dit *connecté* ou *connexe* s'il n'est pas déconnecté.

Une autre définition de la connectivité utilise le concept de chemin :

Définition 5.14. Un chemin de longueur t dans le graphe $G = (V, E)$ est une séquence de sommets $v_0 - v_1 - \dots - v_t$ telle que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pour $i = 0, \dots, t - 1$ et telle que les ensembles $\{v_i, v_{i+1}\}$ sont tous distincts. Un chemin est dit simple si de plus tous les sommets sont distincts. Un chemin est un cycle si $v_t = v_0$.

La remarque suivante est immédiate

Remarque 5.15. Un graphe est connexe ssi pour chaque paire de sommets v et w il existe un chemin connectant v et w .

Démonstration. Supposons que le graphe $G = (V, E)$ est déconnecté, on peut alors écrire $V = T \sqcup S$ et $E \subseteq T \times T \cup S \times S$. Alors il n'existe pas de chemin entre les sommets de T et ceux de S : sinon, s'il existe $t \in T$ et $s \in S$ tels que $(t, s) \in E$, alors $E \not\subseteq T \times T \cup S \times S$.

Maintenant, supposons qu'il existe des sommets v et w entre lesquels il n'existe pas de chemin dans G . Soit T l'ensemble de tous les sommets atteignables par un chemin partant de v , et soit $S := V - T$. Alors $E \subseteq T \times T \cup S \times S$, ce qui montre que le graphe est déconnecté. \square

Remarque 5.16. Tout graphe non vide est une union disjointe de graphes connexes.

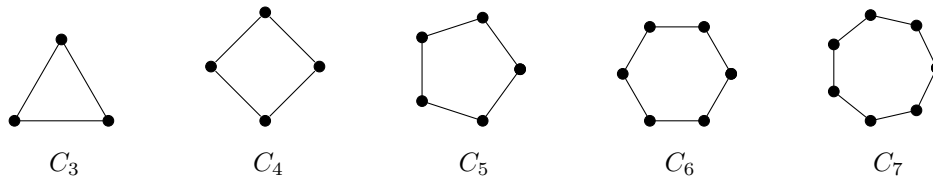
Démonstration. On fait une preuve par récurrence sur le nombre de sommet du graphe. Si le graphe ne contient qu'un sommet, il est trivialement connecté. Supposons maintenant que $G = (V, E)$ a $n > 1$ sommets et que l'affirmation est vraie pour tous les graphes avec moins de n sommets. Choisissons $v \in V$. Soit T l'ensemble de tous les sommets atteignables depuis v . Alors T est connexe puisque pour chaque sommet de T il existe un chemin connectant ce sommet à v . Il existe donc un chemin qui passe par v entre n'importe quel couple de sommets. De plus, il n'existe pas d'arêtes entre les sommets de T et ceux de $S = V - T$ (voir la preuve de la remarque précédente). L'ensemble E est une union disjointe des ensembles $E_1 \subseteq T \times T$ et $E_2 \subseteq S \times S$, et G est une union disjointe de (T, E_1) et (S, E_2) . Par hypothèse de récurrence, (S, E_2) est une union disjointe de graphes connexes et il en est de même pour G . \square

Définition 5.17. Si un graphe est une union disjointe de graphes connexes, alors les sous-graphes sont appelés les *composantes connexes* de G .

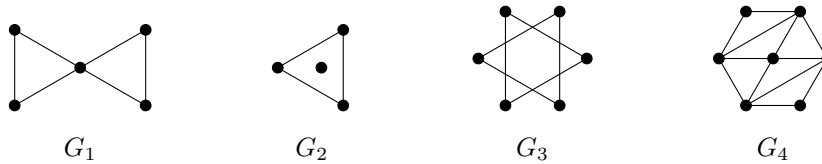
Un autre type de graphes joue un rôle important dans la preuve du théorème de Hierholzer. Ce sont les cycles.

Définition 5.18. Un graphe est un *cycle simple* ou un *cycle* si et seulement s'il est isomorphe au graphe $G = (V, E)$ avec $V = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ et $(v_i, v_j) \in E$ si et seulement si $|i - j| = 1$ ou $|i - j| = m$. Un cycle de m sommets est noté C_m . Un graphe $G = (V, E)$ est dit *décomposable en cycles* si c'est une union de cycles simples d'arêtes disjointes, c'est-à-dire si $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_t$ et $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_t$ ou les (V_i, E_i) sont des cycles simples pour $i = 1, \dots, t$, et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Exemple 5.19. Voici quelques exemple de cycle simple.



Voici quelques exemples de graphes décomposables en cycles qui ne sont pas des cycles simples.



Les graphes G_1 et G_4 sont connexes, alors que G_2 et G_3 ne le sont pas. \diamond

Les cycles et les graphes décomposables en cycles se caractérisent facilement. Mais nous avons d'abord besoin du lemme suivant :

Lemme 5.20. Soit $G = (V, E)$ un graphe, et soit d le degré minimum d'un sommet de G .

- (1) G admet un chemin de longueur d .
- (2) Si $d \geq 2$, alors G admet un cycle de longueur au moins $d + 1$.

Démonstration. (1) Soit un chemin maximal $v_0 - \dots - v_l$ de G , c'est-à-dire un chemin que l'on ne peut prolonger à droite ou à gauche. Alors, tous les voisins de v_0 doivent être dans le chemin, sinon on pourrait le prolonger à gauche. On en déduit que $l \geq \deg(v_0) \geq d$.

(2) Dans le chemin précédent, soit $k := \max\{i \mid (v_0, v_i) \in E\}$ l'index maximal d'un voisin de v_0 . Considérons alors le cycle $v_0 - v_1 - \dots - v_k - v_0$ de longueur $k + 1$. Comme $k \geq \deg(v_0) \geq d$, la taille de ce cycle est d'au moins $d + 1$. \square

Voici maintenant la caractérisation des cycles et des graphes décomposables en cycles.

Théorème 5.21. Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- (1) G est un cycle ssi il est connexe et tout sommet est de degré 2.
- (2) G est décomposable en cycles ssi tout sommet est de degré pair.

Démonstration. (1) Si G est un cycle, alors il est connecté et tous les sommets sont de degré 2. Pour prouver l'autre sens, en utilisant le lemme 5.20(2) on sait que G contient un cycle $C = (V_1, E_1)$ de longueur au moins 3. Supposons que G n'est pas égal à C . Comme G est connexe, il existe donc au moins une arête $(a, b) \notin E_1$ avec $a \in V_1$. Mais c'est impossible, car a est de degré 2 et a uniquement des arêtes qui vont dans C .

(2) Si G est décomposable en cycles, alors chaque sommet de G a un degré pair : chaque sommet est dans un nombre m de cycles simples avec $m \geq 0$ et chacun de ces cycles contribue de 2 au degré du sommet qui est donc de $2m$.

Pour montrer l'autre sens on utilise une récurrence sur le nombre d'arêtes du graphe. Si tous les sommets du graphe sont de degré zéro, alors l'ensemble des arêtes du graphe est vide, et le graphe est décomposable en cycles de manière triviale. Cela termine le début de la récurrence. Pour la suite, supposons que G a un certain nombre $m > 1$ d'arêtes. Soit alors Z l'ensemble des sommets de degré 0 et T l'ensemble des autres sommets qui sont donc de degré pair et ≥ 2 . Il est suffisant de montrer que T est un graphe décomposable en cycle. Comme le degré minimal d'un sommet de T est 2, d'après le lemme 5.20 il existe un cycle C dans T de longueur au moins 3.

Supprimons maintenant toutes les arêtes de ce cycle de G . Dans le graphe résultant, G' , tous les sommets sont encore de degré pair car chaque sommet qui participait au cycle précédent a perdu 2 arêtes et tous les autres aucune. Ainsi G' est décomposable en cycles. Comme G est l'union de G' et C , il est aussi une union de cycles d'arêtes disjointes et est donc décomposable en cycles. □

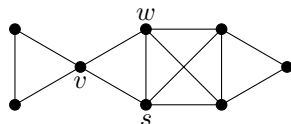
On est maintenant capable de prouver une version plus faible du théorème de Hierholzer :

Théorème 5.22. *Un graphe est Eulérien ssi il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. De plus, si G est un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair, alors pour tout sommet v de G il existe un circuit Eulérien qui commence et termine en v .*

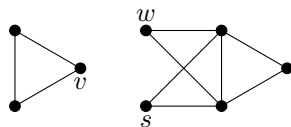
Démonstration. On montre d'abord que si un graphe G est Eulérien, alors il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair. Pour cela, soit $v_0 - v_1 - v_2 - \dots - v_{m-1} - v_0$ un circuit Eulérien. Le nombre d'arêtes du graphe est donc m . Comme chaque sommet de ce cycle a 2 arêtes incidentes (une entrante, une sortante), le degré de chaque sommet est pair. De plus le graphe est connexe car cette propriété est nécessaire pour l'existence du circuit Eulérien.

On montre maintenant la réciproque : si tous les sommets du graphe sont de degré pair et si le graphe est connexe, alors il existe un circuit Eulérien dans le graphe. En fait on va montrer que pour chaque sommet v du graphe, il existe un circuit Eulerien qui commence et termine en v . On va montrer cela par récurrence sur le nombre d'arêtes de G . L'affirmation est évidente si G n'a que trois arêtes ; ce qui permet de commencer la récurrence. Pour la suite, choisissons un sommet v , son degré est forcément non nul car G est connexe. Par le théorème 5.21, on sait que G est un graphe décomposable en cycles, v appartient donc à un cycle C . Enlevons les arêtes de C du graphe G pour obtenir un graphe G' . Soit G_1, \dots, G_t les composantes connexes de G' , et v_1, \dots, v_t les sommets respectifs de C dans G_1, \dots, G_t . Chaque G_i est un graphe connexe pour lequel le degré des sommets est pair. Soit P_i un tour Eulérien dans G_i qui commence et termine en v_i (ce tour existe par hypothèse de récurrence). On va maintenant construire un tour Eulérien dans G : On part de v et on avance sur le cycle C jusqu'à v_1 , puis on suit le tour P_1 qui nous ramène à v_1 , on continue ensuite sur C jusqu'à v_2 , puis on suit P_2 , et ainsi de suite. □

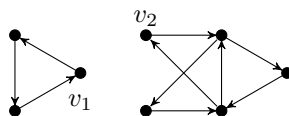
Exemple 5.23. Appliquons le procédé de la preuve précédente sur le graphe suivant :



Comme cycle C on choisit celui formé par les sommets v , w , et s . En l'enlevant du graphe, on obtient deux composantes connexes :

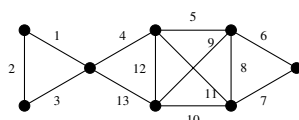


On choisit $v_1 := v$ et $v_2 := w$ (on aurait aussi pu choisir $v_2 = s$). Ensuite, on trouve un tour Eulérien pour chacune des deux composantes :



Les flèches indiquent dans quelle direction on doit suivre le chemin. Ainsi, dans la composante connexe de gauche le chemin commence en v_1 , puis va sur le sommet du haut et descend sur le sommet du bas avant de revenir sur v_1 .

Maintenant, on remet le cycle C , on va de v_1 à v_2 puis on suit le tour Eulérien sur la composante connexe de droite, on retourne en v_2 et on finit le tour en retournant en v_1 par le cycle C .



Pour éviter toute confusion, les nombres sur les arêtes du dessin précédent donne leur ordre dans le tour Eulérien de G . \diamond

On peut maintenant prouver le théorème de Hierholzer pour les graphes :

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre d'arêtes de G . Pour commencer, prenons un graphe avec une arête : un tel graphe peut avoir seulement 2 sommets (car il est connexe), chacun de degré 1, et le théorème est vrai.

Pour la suite de la récurrence, on remarque d'abord que G peut soit avoir deux sommets de degré impair soit aucun d'après le corollaire 5.9. Supposons que G n'a pas de sommet de degré impair. Alors G possède un tour Eulérien d'après le théorème 5.22, ce qui fini ce cas. Supposons maintenant que G a deux sommets de degré impair notés v et w .

On va distinguer deux cas : Commençons par supposer que v et w sont connectés par une arête e . On enlève e pour obtenir un nouveau graphe G' . Ce graphe a au plus deux composantes connexes, et tous ses sommets sont de degré pair. S'il a deux composantes, G_1 et G_2 , qui contiennent respectivement v et w , alors on trouve un tour Eulérien P_1 dans G_1 qui commence et termine par v , et un autre tour P_2 dans G_2 qui commence et termine par w . Ce qu'on peut faire d'après le théorème 5.22. En suivant le tour P_1 , puis l'arête e , et le tour P_2 on obtient un chemin Eulérien dans G . Si G' est connexe, on trouve un tour Eulerien P_1 de ce graphe et on lui ajoute e pour obtenir un chemin Eulérien de G .

Dans le deuxième cas, on suppose que v et w ne sont pas connectés. Alors v est connecté à un sommet z de degré pair par une arête e . On l'enlève du graphe pour obtenir un graphe G' . Comme précédemment, G' peut avoir au plus deux composantes connexes. S'il en a deux G_1 et G_2 , alors v et z ne sont pas dans la même, disons que v est dans G_1 et que z est dans G_2 . Le degré de v dans G_1 est pair, et celui de z dans G_2 est impair. On en déduit que w doit forcément être dans G_2 aussi (car le nombres de sommet de degré impair est impair d'après le corollaire 5.9). De plus, tous les sommets de G_1 sont de degré pair. Donc G_1 admet un tour Eulérien P_1 . De plus, par hypothèse de récurrence G_2 admet un tour Eulérien P_2 qui commence en z et fini en w . En suivant P_1 , puis l'arête e de v à z et ensuite le chemin Eulérien P_2 de z à w nous donne un chemin Eulérien de v à w dans G .

Si G' est connexe, alors il existe un chemin Eulérien P de z à w par hypothèse de récurrence. En suivant l'arête e , puis le chemin P on obtient un chemin Eulérien de v à w , et on a fini. \square

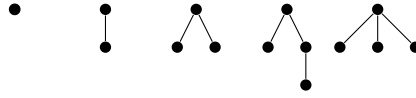
5.3. Graphes planaires et formule d'Euler

Quel est le nombre minimum d'arêtes que peut avoir un graphe connexe ? De manière évidente, un tel graphe ne peut avoir de cycle, car on pourrait enlever l'une des arêtes d'un tel cycle sans rompre la connexité.

Définition 5.24. Un graphe est dit *acyclique* s'il ne contient pas de cycle. Un graphe acyclique et connexe est un *arbre*.

Ainsi, un graphe connexe avec un nombre d'arêtes minimal est nécessairement un arbre.

Exemple 5.25. Voici une liste exhaustive des arbres sur 1, 2, 3, et 4 sommets :



◇

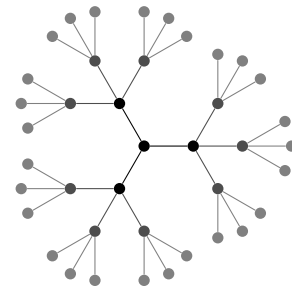
Un point commun de tous ces exemples est que le nombre d'arêtes est toujours égal au nombre de sommets moins un. En fait, c'est toujours le cas comme le montre le résultat suivant. Le nombre d'arêtes minimal qu'un graphe connexe sur n sommets peut avoir est $n - 1$.

Théorème 5.26. *Le nombre d'arêtes d'un arbre sur n sommets est $n - 1$.*

Démonstration. On fait un raisonnement par récurrence sur le nombre de sommets de l'arbre. Si $n = 1$, alors l'affirmation est triviale. Supposons maintenant que $n > 1$ et que l'affirmation est vraie pour tout $i < n$, c'est-à-dire que pour tout $i < n$ on sait que le nombre d'arêtes d'un arbre sur i sommets est $i - 1$.

Prenons un arbre sur n sommets, choisissons une de ses arêtes e et supprimons-la. Le graphe résultant n'est plus connexe : sinon rajouter l'arête e provoquerait un cycle. De plus, chacune des parties du graphe est connexe : sinon l'arbre original ne serait pas connexe non plus. Supposons que ces parties contiennent respectivement m et $n - m$ sommets. Par hypothèse de récurrence, elles ont $m - 1$ et $n - m - 1$ arêtes. Ainsi le nombre total d'arêtes de l'arbre original est $1 + (m - 1) + (n - m - 1) = n - 1$. □

Les arbres peuvent être dessinés dans le plan de telle manière que deux arêtes ne se touchent que sur les sommets. Voici un algorithme possible pour cela : on commence par placer un sommet arbitraire, on dessine ses voisins en cercle autour de lui et avec des angles identiques, et ainsi de suite. Un exemple est donné sur la figure de droite.



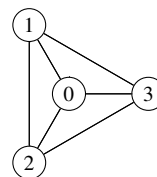
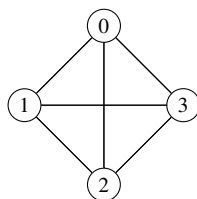
Définition 5.27. Un *graphe planaire* est un graphe qui peut être dessiné dans le plan de telle manière que ses arêtes ne se touchent qu'en leurs extrémités.

Comme l'on a vu plus haut, les arbres sont des graphes planaires. Néanmoins, l'ensemble des arbres planaires est beaucoup plus large que juste les arbres. Par exemple, une union disjointe de graphes planaires est un graphe planaire, ce qui peut se voir facilement en les dessinant suffisamment loin les uns des autres dans le plan.

On en déduit que tout graphe acyclique est planaire : si le graphe est connexe c'est un arbre. Sinon, ses composantes connexes sont des arbres et donc planaires. Et c'est encore le cas du graphe original vu que c'est une union disjointe de graphes planaires.

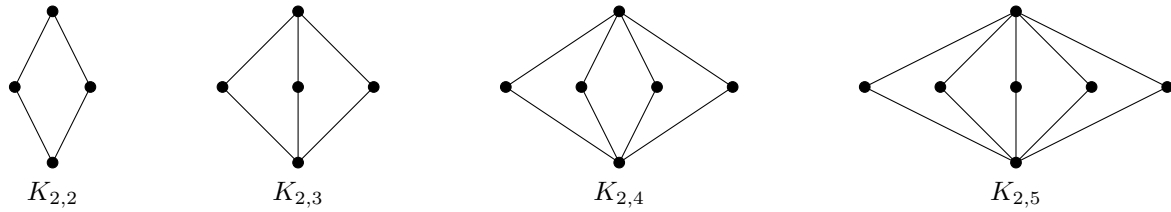
Un ingrédient clef pour montrer qu'un arbre n'est pas planaire réside dans l'étude de ses sous-graphes. Si $G = (V, E)$ est un graphe, alors tout graphe de la forme (V', E') avec $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$ est appelé un *sous-graphe* de G . Clairement, si un graphe est planaire, alors c'est le cas de tous ses sous-graphes. En particulier, un graphe n'est pas planaire s'il contient un sous-graphe non planaire. Mais la réciproque est-elle également vraie ? C'est-à-dire, un graphe est-il planaire si et seulement si tous ses sous-graphes propres (différents de lui-même) sont planaire ? Il se trouve que ce n'est pas le cas, comme on le verra plus loin.

Exemple 5.28. Les graphes complets K_1, K_2, K_3 sont planaire. K_4 est également planaire.



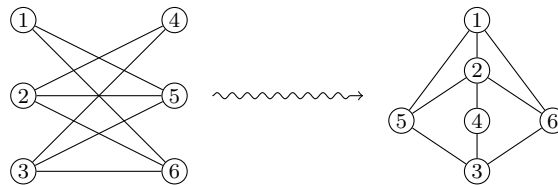
On montrera plus loin que K_5 n'est pas planaire. On en déduit que K_n n'est pas planaire pour tout $n \geq 5$ car un tel K_n admet K_5 comme sous-graphe.

Les graphes bipartis complets $K_{1,n}$ sont planaires pour tout n (ce sont des arbres). $K_{2,n}$ est aussi planaire pour tout n comme le montre la figure suivante :



On montrera plus loin que $K_{3,3}$ n'est pas planaire. On en déduit que $K_{m,n}$ n'est pas planaire si m et n sont tous les deux plus grand ou égaux à 3 car un tel graphe contient $K_{3,3}$ comme sous-graphe. \diamond

Le fait que $K_{3,3}$ n'est pas planaire est très intéressant : en fait, tous les sous-graphes propres de $K_{3,3}$ sont planaires. Pour voir cela, il suffit de montrer que la suppression de n'importe quelle arête de $K_{3,3}$ le rend planaire. Comme $K_{3,3}$ est symétrique par rapport aux sommets de chacun de ses côtés, on peut choisir l'arête que l'on veut. Dans la figure ci-dessous, on supprime l'arête entre les sommets 4 et 1 :

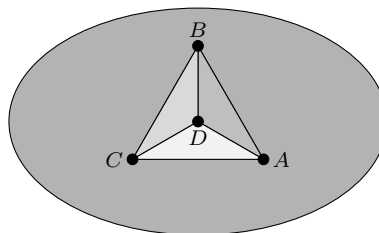


Un autre ingrédient clef dans l'étude des graphes planaires est la subdivision du plan donnée par le graphe. Cette notion est rendue plus précise dans la définition suivante.

Définition 5.29. Soit G un graphe planaire dessiné dans le plan. Une *face* du graphe est une région du plan telle que n'importe quel couple de points peut être relié par un chemin continu qui ne coupe aucune des arêtes du graphes. Par "coupe" on veut dire que le chemin admet deux points de part et d'autre de l'arête.

Exemple 5.30. Un arbre n'admet qu'une face : le plan en entier. En fait, il est possible de trouver un chemin continu de n'importe quel point du plan à un autre sans couper une arête de l'arbre. C'est possible car l'arbre n'a pas de cycles.

Le graphe planaire K_4 a 4 faces dessinées ci-dessous :



Une des faces est donnée par le triangle $\langle A, D, B \rangle$, une autre par le triangle $\langle C, D, A \rangle$, une autre par le triangle $\langle C, D, B \rangle$, et la dernière par la région autour du graphe. \diamond

Pour les graphes planaires, le nombre de faces, de sommets et d'arêtes satisfait un égalité fondamentale connu sous le nom de formule d'Euler.

Théorème 5.31 (Formule d'Euler). *Supposons que G est un graphe connexe avec f faces, e arêtes et v sommets. Alors $v - e + f = 2$.*

Démonstration. On montre le théorème par récurrence sur le nombre e d'arêtes de G . Si $e = 1$, alors G est un arbre sur 2 sommets, et possède une seule face, le théorème est donc valide.

Supposons maintenant que G a e arêtes, et supposons que le théorème est vrai pour tous les graphes avec au plus $e - 1$ arêtes. Si G est acyclique, alors $f = 1$, et $e = v - 1$ d'après le théorème 5.26, et dont $v - e + f = 2$. Si G n'est pas acyclique, prenons alors une arêtes (a, b) qui participe à un cycle de G , et supprimons la du graphe G . Le graphe résultant est encore connexe, et par hypothèse de récurrence, la formule d'Euler est valide pour ce graphe. Si f et e sont le nombre de faces et d'arête du graphe original, alors le graphe résultant a $f - 1$ faces et $e - 1$ arêtes. On sait que pour ce graphe $v - (e - 1) + (f - 1) = 2$, ce qui termine la preuve du théorème. \square

Le théorème précédent est une généralisation du théorème 5.26 : si G est un arbre, alors il admet une face, donc $v - e = 1$, ce qui nous donne l'affirmation du théorème 5.26.

De manière intuitive, un graphe planaire ne peut avoir trop d'arêtes : plus il y en a, plus il est difficile de dessiner le graphe dans un plan sans intersection. Le théorème suivant est essentiel pour prouver cette affirmation intuitive. Pour la preuve, on a besoin des concepts suivants :

Définition 5.32. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe.

1. La *circonférence* de G est la taille du plus petit cycle dans G , s'il existe.
2. Un *pont* dans G est une arête de G qui sépare G en deux composantes connexes si on l'enlève.

Exemple 5.33. Le graphe dans l'exemple de la figure 5.2 a une circonférence de 3, et il a un pont. ◇

La preuve de la proposition suivante est laissée en exercice.

Proposition 5.34. Soit G un graphe planaire.

- (1) Chaque arête de G est contenue dans au plus 2 faces.
- (2) Une arête de G est un pont ssi elle est contenue dans exactement une face.

Théorème 5.35. Soit G une composante connexe de n sommets d'un graphe planaire. Si G n'a pas de cycle, alors G a $n-1$ arêtes. Si G a une circonférence g , alors G a au plus $g(n-2)/(g-2)$ arêtes.

Démonstration. Si G est un arbre, alors l'affirmation en découle d'après le théorème 5.31. Supposons donc que G a un cycle.

Comme la circonférence de G est ≥ 3 par hypothèse, il s'ensuit que le nombre de sommets n de G est au moins 3. On va faire une récurrence sur le nombre de sommets de G .

Pour $n = 3$ l'affirmation est triviale. Supposons maintenant que l'affirmation du théorème est vraie pour tous les graphes avec n sommets. On va prouver que l'affirmation est aussi vraie pour les graphes sur $n + 1$ sommets.

Soit G un graphe avec $n + 1$ sommets. On va distinguer 2 cas :

Cas 1 Commençons par supposer que G admet un pont b . Enlever b coupe G en deux composantes connexes G_1 et G_2 . Notons respectivement leur nombre de sommets n_1 et n_2 , et leur nombre d'arêtes e_1 et e_2 . Ainsi $n + 1 = n_1 + n_2$, et le nombre e d'arêtes de G est $e_1 + e_2 + 1$. Comme G a un cycle, il se trouve que G_1 et G_2 ne peuvent être tout deux acyclique, supposons par exemple que G_1 a un cycle. Si G_2 a également un cycle, alors par hypothèse de récurrence on a

$$e_1 + e_2 + 1 \leq \frac{g(n_1 - 2 + n_2 - 2)}{g - 2} + 1 \leq \frac{g(n + 1 - 3) - 2}{g - 2} \leq \frac{g(n - 1)}{g - 2},$$

ce qui montre l'affirmation. (Notez qu'il est possible que la circonférence de G_1 ou de G_2 soit plus grande que g ; mais comme la fonction $g/(g-2)$ est décroissante, on peut toujours remplacer la circonférence réelle de G_1 ou de G_2 par g)

Si G_2 est un arbre, alors $e_2 = n_2 - 1$, et on a

$$e_1 + e_2 + 1 = e_1 + n_2 \leq \frac{g(n_1 - 2)}{g - 2} + n_2 < \frac{g(n_1 + n_2 - 1)}{g - 2},$$

car $g/(g-2) > 1$.

Cas 2 Supposons maintenant que G n'a pas de pont. Alors par la proposition 5.34 toutes les arêtes de G sont contenues dans deux faces. Si f_i représente le nombre de faces de G dont les bords sont formé de i arêtes, alors on a

$$2e = \sum_{i=1}^{n+1} i f_i \geq \sum_{i=1}^{n+1} g f_i = g f,$$

avec f le nombre de faces de G . En effet, $f_i = 0$ pour $i < g$, puisque g est la circonférence de G . D'un autre coté, en appliquant la formule d'Euler, on a

$$e + 2 = (n + 1) + f \leq (n + 1) + \frac{2e}{g}.$$

Cela montre que $e \leq g(n-1)/(g-2)$, ce qui termine la preuve.

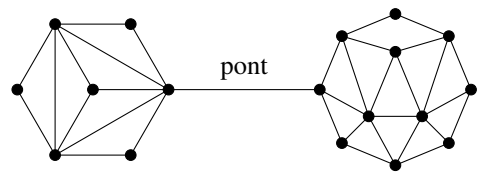


Figure 5.2 – Exemple de pont

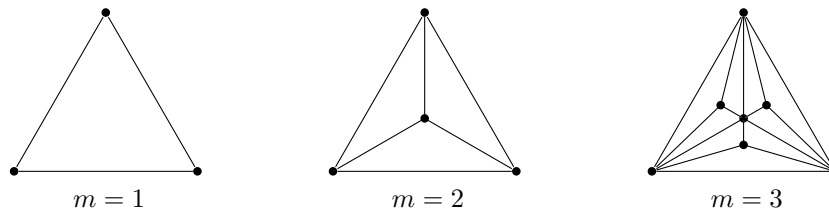
□

Exemple 5.36. La borne du théorème précédent est exacte : considérons les graphes $K_{2,n}$. On voit que $g = 4$, le nombre de sommets est $n + 2$, et le nombre d'arêtes est $2n = 4n/2$. ◇

Corollaire 5.37. Soit G un graphe planaire et connexe avec $n \geq 3$ sommets. Alors G contient au plus $3n - 6$ arêtes.

Démonstration. Tout graphe G est soit acyclique, ou a une circonférence d'au moins 3. S'il est acyclique, alors le nombre d'arêtes est $n - 1 < 3n - 6$. Sinon, un graphe de circonférence 3 a au plus $3(n - 2) = 3n - 6$ arête par le théorème ci-dessus. De plus, si la circonférence du graphe est plus grande que 3, on peut toujours lui rajouter des arêtes pour obtenir un triangle et se ramener au cas précédent. □

Exemple 5.38. La borne du corollaire précédent est exacte pour une séquence infinie de graphes planaires, les trois premier étant donné ci-dessous :



Ainsi, on commence avec un triangle, et à chaque étape, on choisit un sommet dans chaque triangle du graphe, et on le connecte aux sommets voisins. Si m correspond au numéro de l'étape, on peut montrer par récurrence que le graphe numéro m est formé de 3^m triangles. Si e_m et n_m correspondent respectivement au nombre d'arêtes et de sommet du graphe numéro m , alors on a les formules :

$$e_1 = 3, n_1 = 3, e_{m+1} = e_m + 3^{m+1}, n_{m+1} = n_m + 3^m, \quad m \geq 1.$$

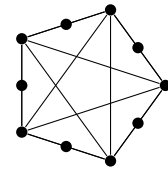
En effet, au passage de l'étape m à l'étape $m + 1$ on va prendre autant de nouveaux sommets que de triangles à l'étape m , c'est-à-dire 3^m . D'où la formule pour n_{m+1} . De plus, chacun des ces nouveaux sommets conduit à trois nouvelles arêtes, une pour chaque sommets du triangle précédent. D'où la formule pour e_{m+1} .

On utilise encore un récurrence pour montrer que $e_m = 3(n_m - 2)$ pour tout m . L'affirmation est claire pour $m = 1$. et pour $m \geq 2$, on a $3(n_{m+1} - 2) = 3(n_m - 2 + 3^m) = 3(n_m - 2) + 3^{m+1} = e_{m+1}$, ce qui termine la démonstration. ◇

Corollaire 5.39. Le graphe complet K_5 n'est pas planaire. Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Démonstration. K_5 a 5 sommets, mais son nombre d'arêtes est 10 ce qui est plus grand que $3 \cdot 5 - 6 = 9$. $K_{3,3}$ a une circonférence de 4, donc son nombre d'arêtes devrait être d'au plus $2 \cdot (6 - 2) = 8$, mais il est de 9. □

Donc, comment pouvons-nous tester si un graphe est planaire ou pas ? Si un graphe contient K_5 ou $K_{3,3}$, il n'est certainement pas planaire, mais ce critère n'est pas suffisant. Par exemple, le graphe sur la droite ne contient aucun de ces deux graphes mais il n'est pas planaire. Ce graphe est obtenu depuis K_5 par un procédé appelé *subdivision* dans lequel un nouveau sommet est placé sur une arête qui existe déjà. Un théorème du mathématicien Polonais Kazimierz Kuratowski des années 1930 montre qu'un graphe est planaire ssi il ne contient pas une subdivision de K_5 ou une subdivision de $K_{3,3}$.



Ce théorème ne conduit pas à une méthode très efficace pour tester si un graphe est planaire ou non. Une telle méthode fut trouvée en 1967 par les mathématiciens israéliens Lempel, Even et Cederbaum (Il s'agit d'ailleurs du même Lempel que celui de l'algorithme de compression de Lempel-Ziv). La méthode fut rendue encore plus efficace en 1974 par Even et Tarjan. Ces méthodes et le résultat de Kuratowski dépassent le cadre de ce cours.

On mentionne encore un résultat sur les graphes planaires qui montre que de tels graphes ont énormément de sommets de faible degré.

Proposition 5.40. Soit G un graphe planaire avec n sommets et soit n_d le nombre de sommets de degré au plus d dans G . Alors pour tout $d \geq 1$ on a

$$n_d \geq \frac{n(d - 5) + 12}{d + 1}.$$

Ainsi G a au moins 2 sommets de degré au plus 5, et pour des n grand, au moins $1/7$ des sommets de G sont de degré au plus 6.

Démonstration. $n - n_d$ est le nombre de sommets de degré au moins $d + 1$, ainsi $(n - n_d)(d + 1)/2$ est inférieur au nombre d'arêtes de G . En appliquant le corollaire 5.37, on a

$$(n - n_d)(d + 1) \leq 6n - 12.$$

Un simple manipulation conduit au résultat. □

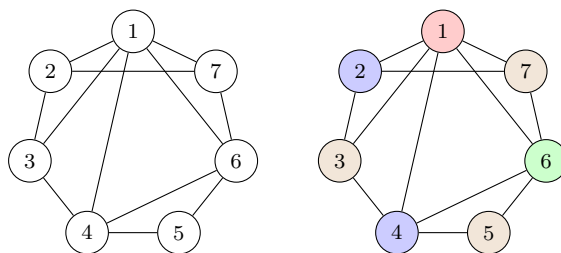
5.4. Coloriage de graphe

Supposez que vous vouliez planifier les dates d'examens et que, par gentillesse, vous voulez éviter que les étudiants aient plus d'un examen par jour. Notons les différents cours 1,2,3,4,5,6,7. La table ci-dessous contient une étoile dans la case (i, j) si au moins un étudiant suit les cours i et j . Cours dont les examens ne peuvent donc avoir lieu le même jour.

	1	2	3	4	5	6	7
1		*	*	*		*	*
2	*		*				*
3	*	*		*			
4	*		*		*	*	
5				*		*	
6	*			*	*		*
7	*	*				*	

Quel est le nombre minimal de jours requis pour la période d'examens ?

Ce problème peut être posé en terme de théorie des graphes. On interprète la table précédente comme un graphe sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, 7\}$: Ce que l'on veut faire, c'est associer à chaque sommet un nombre d'un ensemble S (de jours) tel que deux sommets adjacents n'aient pas le même nombre. La plus petite taille de S qui nous permet de faire cela est donc le nombre minimal de jours nécessaire. Il est d'usage de voir l'ensemble S comme un ensemble de "couleurs". On appelle ainsi une telle association de couleurs à chaque sommet un coloriage de graphe. Pour notre exemple, la figure suivante nous montre le graphe et un coloriage possible avec 4 couleurs.



Dans ce cas, on peut voir qu'un coloriage avec seulement 3 couleurs n'est pas possible : Si c'était le cas, les arêtes 1, 2, et 7 obtiendraient chacune une de ces couleurs, par exemple rouge, bleu et vert. Mais comme les sommets 1 et 2 touchent 3, 3 serait également vert. De même 1, 7 et 6 sont connectés, la couleur de 6 est donc bleu. Enfin 1, 3, et 4 étant connectés, la couleur de 4 serait aussi bleu, une contradiction car 4 et 6 sont connectés.

Définition 5.41. Soit $G = (V, E)$ un graphe.

1. Un *coloriage* de G avec k couleurs est une application $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que pour $(a, b) \in E$ on a $f(a) \neq f(b)$.
2. G est dit *k-coloriable* s'il existe un coloriage de G avec k couleurs.
3. Le *nombre chromatique* de G , noté $\chi(G)$, est le plus petit k tel que G soit k -coloriable.

Voici quelques résultats élémentaires sur le nombre chromatique :

Proposition 5.42. Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- (1) $\chi(G) = 1$ ssi G n'a pas d'arête.
- (2) $\chi(G) \leq |V|$.
- (3) $\chi(K_n) = n$ pour tout $n \geq 1$.

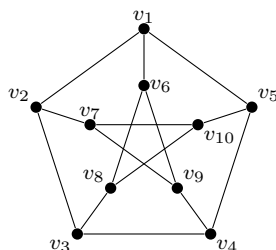


Figure 5.3 – Le graphe de Petersen et une numérotation de ses sommets

(4) $\chi(C_n) = 2$ si n est pair et 3 si n est impair.

Démonstration. (1) Facile.

(2) Facile aussi, il suffit de colorier chaque sommet d'une couleur différente.

(3) N'importe quel coloriage de K_n avec moins de n couleurs implique que deux sommets sont de la même couleur, ce qui est une contradiction car tous les sommets sont adjacents entre eux.

(4) Par (1), $\chi(C_n) \geq 2$. Associons l'ensemble des sommets de C_n à \mathbb{Z}_n . Si n est pair, alors on colorie tous les sommets d'indice pairs avec une couleur et tous les autres avec l'autre.

Si n est impair, on montre que C_n n'est pas 2-coloriable. Supposons qu'il le soit, et qu'on colorie ses sommets en bleu ou rouge. On suppose que 0 est bleu. Alors 1 et $n - 1$ doivent être rouge, 2 et $n - 2$ doivent être bleu, et de façon générale k et $n - k$ sont de la même couleur pour tout $1 \leq k < n/2$. Si $n = 2m + 1$, alors avec $k = m$, on voit que m et $m + 1$ sont de la même couleur, une contradiction.

Il est aussi facile de voir que C_n est 3-coloriable, dans la preuve ci-dessus, il suffit de colorier le sommet d'indice m avec la troisième couleur. □

Trouver la valeur exacte de $\chi(G)$ est souvent très difficile. Une des méthodes qui peut aider à borner $\chi(G)$ est donnée dans la remarque suivante.

Remarque 5.43. Supposons que H est un sous-graphe de G . Alors $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Comment pouvons nous trouver un coloriage d'un graphe ? Dans la suite, on donne un algorithme simple qui permet de trouver un coloriage avec peu de couleurs d'un graphe (mais pas nécessairement celui avec le moins de couleurs). On suppose que les couleurs sont des nombres $1, 2, \dots$, et que les sommets du graphe sont ordonnés (de manière arbitraire) et notés v_1, v_2, \dots, v_n . On va colorier les sommets un par un, en utilisant toujours la couleur de plus petit indice qui convient. Donnons une description plus précise de l'algorithme. Il associe à chaque sommet v une couleur $c(v)$. E est l'ensemble des arêtes de G .

- (1) Poser $c(v_1) := 1$.
- (2) Pour $i = 2$ jusqu'à n faire
 - (2a) Poser $A := \{c(v_j) \mid j < i \wedge (v_i, v_j) \in E\}$.
 - (2b) Poser $j := \min(\mathbb{N} - A)$.
 - (2c) Poser $c(v_i) := j$.

Exemple 5.44. Appliquons l'algorithme précédent pour colorier le graphe de Petersen donné sur la figure 5.3.

On part du sommet v_1 et on pose $c(v_1) = 1$. Ensuite, on prend le sommet v_2 ; et comme il est connecté à v_1 , on obtient $c(v_2) = 2$. Pour calculer $c(v_3)$, on remarque que l'ensemble A de l'étape (2a) vaut $\{2\}$, et donc $c(v_3) = 1$. De même on a $c(v_4) = 2$. Pour calculer $c(v_5)$, on remarque que v_5 est relié à v_1 et v_4 , donc $A = \{1, 2\}$ et $c(v_5) = 3$.

Passons maintenant aux sommets intérieurs. v_6 est connecté uniquement à v_1 parmi les sommets déjà coloriés, donc $c(v_6) = 2$. De même, $c(v_7) = 1$. v_8 est connecté à v_6 et v_3 parmi les sommets déjà coloriés; comme $c(v_6) = 2$ et $c(v_3) = 1$, on obtient $c(v_8) = 3$. Le sommet v_9 est connecté à v_6, v_7 , et v_4 . Ici, l'ensemble A vaut $\{1, 2\}$, et donc $c(v_9) = 3$. Finalement, v_{10} est connecté à v_5, v_7 , et v_8 , donc $A = \{c(v_5), c(v_7), c(v_8)\} = \{3, 1\}$, et $c(v_{10}) = 2$. Pour résumer, on a la liste suivante :

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
$c(v)$	1	2	1	2	3	2	1	3	3	2

Ce qui montre que $\chi(P) \leq 3$. D'un autre côté, P contient C_5 , et donc $\chi(P) \geq \chi(C_5) = 3$, d'après la proposition 5.42(4). On en conclut que $\chi(P) = 3$. \diamond

Même s'il peut sembler que l'algorithme précédent utilise toujours le moins de couleur possible, ce n'est pas le cas. En fait, trouver le nombre chromatique d'un graphe est vraiment très difficile, avec un sens que l'on peut préciser.

Proposition 5.45. Soit $\Delta(G)$ le degré maximum d'un sommet du graphe G . Alors $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre de sommets de G . L'affirmation est claire si G n'a qu'un sommet. Supposons que G a n sommets, avec $n \geq 1$. Choisissons un sommet v de G de degré $\Delta(G)$ et supprimons-le du graphe avec toutes les arêtes qui lui sont reliées. Cela nous donne un nouveau graphe G' , avec $n - 1$ sommets, et $\Delta(G') \leq \Delta(G)$. Par hypothèse de récurrence, G' est coloriable avec au plus $\Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1$ couleurs. Ce qui veut dire que parmi les voisins de v une de ces couleurs n'apparaît pas, et donc v peut être colorié avec cette couleur. \square

La proposition ci-dessus peut être rendue plus forte, mais nous n'allons pas le faire ici. On mentionne seulement le théorème suivant du de Brooks :

Théorème 5.46. Soit G un graphe connexe qui n'est pas complet et n'admet pas de cycle de longueur paire. Alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Une grande partie de la recherche sur le nombre chromatique des graphes s'est centré autour d'un effort monumental pour trouver le nombre chromatique des graphes planaires.

Imaginons un plan qui est découpé par un ensemble de courbes de telle manière qu'aucun point ne peut appartenir à plus de trois des régions délimitées par les courbes. On parle de *carte admissible*, de *frontières* et d'*états*. Ainsi, on exclut le cas de plus de quatre états qui ont un point commun sur leurs frontières, comme c'est par exemple le cas pour les états Utah, New Mexico, Arizona, et Colorado de la carte des États Unis (voir figure 5.4). Un coloriage admissible d'une carte est un coloriage tel qu'il n'existe pas d'états voisins avec la même couleur. Quel est le nombre minimal de couleurs requises pour colorier n'importe quelle carte admissible de cette façon ?

Ce problème de coloriage de carte peut être traduit dans le langage des graphes. Pour cela, définissons le graphe $G = (V, E)$ comme un graphe dont les états sont les sommets, et pour lequel deux sommets sont reliés s'il sont frontaliers. Il est facile de voir que ce graphe est planaire : en fait, choisir un point arbitraire de chaque état et les relier produit un graphe planaire. Un coloriage de cette carte correspond alors à un coloriage de G . La question est donc de savoir si on peut borner le nombre chromatique des graphes planaires.

Pendant plus de 100 ans, le problème ouvert le plus connu de la théorie des graphes était de savoir si 4 couleurs suffisent à colorier n'importe quel graphe planaire. C'est-à-dire si $\chi(G) \leq 4$ pour tout graphe planaire G . Ce problème a été posé pour la première fois en 1852 par Francis Guthrie. Plus de 100 ans de recherche ont produit un grand nombre de preuves erronées, mais également un grand nombre d'approches prometteuses. Le sommet de tout ces efforts fut le travail d'Appel et d'Haken, qui en 1976 ont prouvé le "théorème des quatre couleurs" en utilisant un ensemble de réductions théoriques et de nombreuses heures de calculs sur des ordinateurs.

Théorème 5.47 (Théorème des quatre couleurs). *Le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus 4.*

La preuve de ce théorème dépasse largement le cadre de ce cours. A la place, on va se contenter d'un peu moins. Dans la suite de cette section on va montrer que 5 couleurs suffisent toujours. En d'autres mots, on va montrer le théorème suivant :



Figure 5.4 – 4-coloriage d'une carte des États Unis. Remarque que cette carte peut être coloriée avec 4 couleurs même si elle ne satisfait pas complètement les conditions requises car les états Utah, New Mexico, Arizona et Colorado n'ont pas une relation de voisinage convenable.

Théorème 5.48 (Théorème des cinq couleurs). *Soit G un graphe planaire. Alors $\chi(G) \leq 5$.*

Bien sûr, ce théorème est un corollaire du théorème des quatre couleurs. Mais en raison de la complexité de la preuve de ce dernier, une preuve simple du théorème des cinq couleurs est la bienvenue. Une telle preuve fut donnée par Heawood en 1990. Dans ce cours, on suit une preuve encore plus simple donnée par Thomassen en 1994 qui prouve en fait beaucoup plus que le théorème des cinq couleurs.

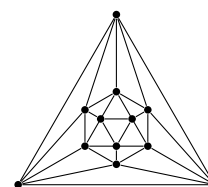
Pour nous échauffer, prouvons le théorème des six couleurs.

Proposition 5.49. *Soit G un graphe planaire, alors $\chi(G) \leq 6$.*

Démonstration. La preuve est très similaire à celle de la proposition 5.45, et utilise une récurrence sur le nombre de sommets de G . Si G n'a qu'un sommet, c'est trivial.

Supposons que G a n sommets, avec $n \geq 2$. En utilisant la proposition 5.40, G a un sommet v de degré au plus 5. On enlève v et toutes les arêtes qui le touchent de G pour obtenir un graphe planaire G' sur $n - 1$ sommets. Par hypothèse de récurrence G' est 6-coloriable. Ce qui nous laisse le choix d'au moins une couleur qui n'apparaît pas dans les voisins de v . On peut la choisir pour v et on obtient un coloriage admissible de G . \square

Si l'on est capable de montrer que tout graphe planaire a au moins un sommet de degré au plus 4, alors on peut utiliser exactement le même argument pour montrer le théorème des cinq couleurs. Malheureusement, ce n'est pas vrai. Le graphe sur la droite nous donne un contre exemple. Ce graphe est le graphe d'incidence des sommets de l'icosaèdre, qui est l'un des cinq solides de Platon. L'icosaèdre a 20 faces et 12 sommets. Pour cette raison ce graphe est simplement appelé l'icosaèdre.



Définition 5.50. Soit $G = (V, E)$ un graphe, et $f: V \rightarrow P^*(\mathbb{N})$ une application de V dans l'ensemble des sous-ensembles finis de \mathbb{N} . Un *coloriage par liste admissible* pour la paire (G, f) est un coloriage $g: V \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $g(v) \in f(v)$ pour tout $v \in V$, et tel que $g(v) \neq g(w)$ si $(v, w) \in E$.

G est dit k -coloriable par liste s'il admet un coloriage par liste admissible pour toute fonction $f: V \rightarrow P^*(\mathbb{N})$ pour laquelle $|f(v)| \geq k$ pour tout $v \in V$.

Le *nombre chromatique par liste* de G , noté $\text{ch}(G)$, est le plus petit nombre k tel que G est k -coloriable par liste.

Remarque 5.51. *Pour tout graphe G on a $\text{ch}(G) \geq \chi(G)$.*

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ et f définie par $f(v) := \{1, \dots, \chi(G) - 1\}$. Alors (G, f) n'admet pas de coloriage par liste admissible puisque un tel coloriage donnerait un coloriage de G avec moins de $\chi(G)$ couleurs. Ainsi $\text{ch}(G) \geq \chi(G)$. \square

Le théorème de Thomassen dit que le nombre chromatique par liste de n'importe quel graphe planaire est au plus 5. En raisons de la remarque plus haut, cela implique que le nombre chromatique de tout graphe planaire est au plus 5.

Théorème 5.52 (Thomassen). *Si G est un graphe planaire, alors $\text{ch}(G) \leq 5$.*

Démonstration. Par supposition, à tout sommet v de G correspond une liste $f(v)$ de cardinalité ≥ 5 . On doit montrer qu'il est possible de choisir un coloriage admissible des sommets à partir de couleurs de ces ensembles. On peut supposer que G est dessiné dans le plan. Soit

$$C: v_1 - v_2 - \dots - v_{p-1} - v_p - v_1$$

le "cycle extérieur" du graphe, c'est-à-dire le bord de l'unique face infinie qui entoure le dessin de G . Il est possible que le bord de la face infinie ne forme pas un cycle (penser à un arbre par exemple), dans ce cas, on rajoute de nouvelles arêtes selon l'enveloppe convexe du dessin de G pour obtenir un cycle. On peut également rajouter de nouvelles arêtes à G de telle manière que le graphe soit complètement triangulaire. Ainsi on suppose que toutes les faces finies de G sont triangulaires. Clairement, il suffit de démontrer le résultat pour ce cas qui est potentiellement plus dur. On rend le problème encore plus difficile en fixant les couleurs $g(v_1)$ et $g(v_2)$, et en supposant seulement $|f(v)| \geq 3$ pour tout $v \in C - \{v_1, v_2\}$. Cette astuce va nous permettre de montrer le résultat par récurrence sur $n = |V|$.

Le départ avec $p = n = 3$ (et donc $G = C$) est trivial puisqu'au moins l'une des couleurs dans $f(v_3)$ n'a pas encore été utilisée pour v_1 et v_2 .

Maintenant soit $n \geq 4$. On va distinguer 2 cas.

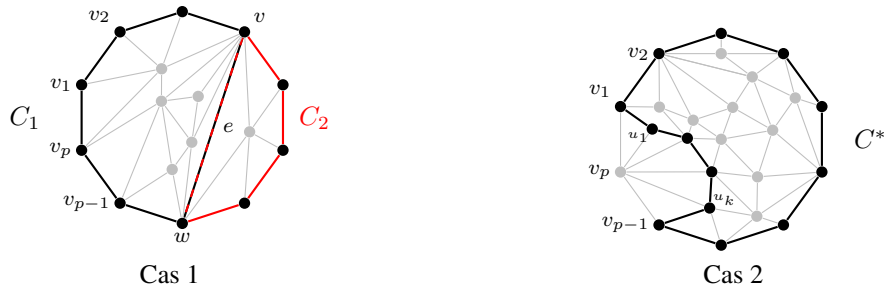


Figure 5.5 – Illustration des deux cas de la démonstration du théorème 5.52.

- Cas 1. On suppose dans ce cas que C admet une corde $e = (v, w)$, c'est-à-dire qu'il y a deux sommets v et w sur C qui sont connectés par une arête e dans le graphe. Alors $C \cup \{e\}$ contient exactement deux cycles C_1 et C_2 qui se partagent l'arête e . On peut supposer sans perte de généralité que v_1 et v_2 appartiennent à C_1 . Une illustration de ce cas est donnée sur la figure 5.5. On applique maintenant l'hypothèse de récurrence à C_1 et on obtient un coloriage par liste c_1 du sous-graphe de bord C_1 de telle manière que v_1 et v_2 aient les couleurs requises. De même on applique l'hypothèse de récurrence sur le sous-graphe délimité par C_2 pour obtenir un coloriage c_2 tel que v et w prennent les mêmes couleurs que celles que c_1 leur a donné. On obtient ainsi un coloriage par liste de G .
- Cas 2. Supposons maintenant que C n'admet pas de corde. Étiquetons les voisins de v_p selon leur ordre naturel (par exemple dans le sens des aiguilles d'une montre) par $v_1, u_1, \dots, u_k, v_{p-1}$. Alors les u_i appartiennent à l'intérieur de C , et comme G est triangulé,

$$P: v_1 - u_1 - u_2 - \dots - u_k - v_{p-1}$$

est un chemin dans G . Comme C n'a pas de corde, $C^* := P \cup (C - \{v_p\})$ est le cycle du bord du sous-graphe $G - \{v_p\}$. La situation est illustrée sur la figure 5.5. On choisit deux couleurs différentes de celle fixée pour v_1 dans $f(v_p)$ et on les enlève de toutes les listes $f(u_i)$ pour $i = 1, \dots, k$. Ce qui laisse des listes d'au moins trois couleurs pour chacun des u_i . On applique maintenant l'hypothèse de récurrence à C^* avec les listes de couleurs réduites pour trouver un coloriage par liste g du sous-graphe $G - \{v_p\}$ de bord C^* pour lequel v_1 et v_2 ont les couleurs requises. Finalement, on choisit une couleur admissible pour v_p , ce qui est possible car au moins l'une des deux couleurs écartées précédemment est distincte de $g(v_{p-1})$. □

La preuve du théorème 5.48 est maintenant triviale compte tenu de la remarque 5.51.

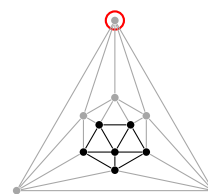
5.5. Ensemble indépendant, clique et partition en clique

Définition 5.53. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *ensemble indépendant* de G est un ensemble $I \subseteq V$ tel que $I \times I \cap E = \emptyset$. C'est-à-dire qu'il n'existe pas d'arêtes entre deux éléments de I . Un *ensemble indépendant maximal* de G est un ensemble indépendant de cardinalité maximale. Le *nombre d'indépendance*, noté $\alpha(G)$ est la taille d'un ensemble indépendant maximal de G .

- Exemple 5.54.**
1. $\alpha(K_n) = 1$ pour tout n : Comme tous les sommets sont connectés, le nombre d'indépendance est strictement plus petit que 2 et vaut donc 1.
 2. $\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ pour tout n . On va le prouver dans le cas n pair. Supposons que les sommets de C_n sont indexés dans le sens des aiguilles d'une montre par $0, 1, \dots, n-1$. Ainsi, le sommet d'index i est connecté avec celui d'index $i-1$ et celui d'index $i+1$, le tout modulo n . Supposons que l'on a un ensemble indépendant de taille t et d'indices $i_1 < i_2 < \dots < i_t$. Comme il est indépendant, on a $i_{j+1} - i_j \geq 2$ pour $j = 1, \dots, t-1$. Donc, $n-2 \geq i_t - i_1 \geq 2t-2$, ce qui nous montre que $t \leq n/2$. De plus, il est facile de voir que c'est une égalité en prenant l'ensemble des sommets d'indice pair par exemple.
 3. Le nombre d'indépendance de $K_{n,m}$ est $\max\{n, m\}$. Clairement, on peut trouver un ensemble indépendant de cette taille car on peut prendre tous les sommets du côté le plus large du graphe biparti. De plus, il ne

peut être plus grand car un ensemble indépendant ne peut contenir deux sommets qui ne sont pas du même côté car ils seraient connectés.

4. Le nombre d'indépendance du graphe de Petersen de la figure 5.3 est 4 : Clairement, les sommets v_2, v_5, v_8 et v_9 sont indépendant. Prouvons maintenant qu'il n'y a pas d'ensemble indépendant de taille 5. Soit S un ensemble indépendant. Clairement, S ne peut avoir plus de deux sommets sur le cycle extérieur car le nombre d'indépendance de C_5 est 2. De manière similaire, S ne peut avoir plus de deux sommets sur l'étoile intérieure (également isomorphe à C_5). Finalement, S ne peut avoir plus de 4 éléments.
5. Le nombre d'indépendance de l'icosahédre est 3. Pour voir cela, remarquez que chaque sommet joue un rôle symétrique (en terme de voisinage), on peut donc fixer le premier sommet d'un ensemble indépendant. Par exemple, le sommet du haut du triangle extérieur. On peut alors exclure ses 5 voisins et il nous reste un graphe plus petit pour lequel on doit trouver un ensemble indépendant. Ce graphe correspond aux arêtes en gras de la figure de droite. Il s'agit d'un 5-cycle avec en plus un sommet central connecté à tous les autres. Si ce sommet central appartient à l'ensemble indépendant, aucun des autres sommets du cycle ne peut y appartenir, et on obtient un ensemble indépendant de taille 2. Sinon, on est ramené à trouver un ensemble indépendant d'un 5-cycle qui est de cardinal 2. On peut donc conclure que le nombre d'indépendance de l'icosahédre est 3.
6. Le graphe sur la droite de la figure 5.6 est appelé le *dodécahédre*. Comme pour l'icosahédre, c'est le graphe d'incidence des arêtes d'un dodécahédre, un autre des 5 solides de Platon. On va montrer que le nombre d'indépendance de ce graphe est 8. On peut facilement trouver un ensemble indépendant de taille 8 : R, P, B, X, F, J, M, T. Montrons qu'on ne peut pas faire mieux. Tout ensemble indépendant ne peut avoir plus de 2 sommets sur le pentagone extérieur, 5 sommets sur le polygone à 10 sommets internes, et 2 sommets sur le pentagone intérieur. Le nombre d'indépendance est donc d'au plus 9. Supposons qu'il soit égal à 9. Alors le polygone à 10 sommets internes contiendrait 5 sommets de cet ensemble indépendant. Il n'y a que 2 possibilités, l'ensemble $\{N, Q, X, J, L\}$, ou l'ensemble $\{P, Z, H, K, M\}$. Dans le premier cas, aucun des sommets du pentagone extérieur ne peut appartenir à cet ensemble indépendant. Dans le second cas, aucun des sommets du pentagone intérieur ne peut appartenir à cet ensemble indépendant. On en conclut que le nombre d'indépendance du dodécahédre est bien 8.



A partir de ces exemple, il semblerait que trouver le nombre d'indépendance d'un graphe soit un tâche difficile : chaque graphe a besoin d'un raisonnement particulier et il n'y a pas d'algorithme général qui se détache. Cette impression n'est pas loin de la vérité. En fait, la théorie de la complexité montre qu'il s'agit en général d'une tâche très difficile, et qu'il est improbable qu'il existe un critère simple qui marche pour tous les graphes.

On va maintenant introduire deux autres notions liées au nombre d'indépendance.

Définition 5.55. Soit G un graphe. Une *clique* de taille n dans G est un sous-graphe de G isomorphe à K_n . La taille maximale d'une clique de G est notée $\omega(G)$. La *taille minimale d'une partition en cliques* de G est notée $\theta(G)$.

Théorème 5.56. Soit $G = (V, E)$ un graphe, et $\bar{G} = (V, V \times V - E)$ son graphe complémentaire. On a les résultats suivants :

- (1) $\chi(G) \geq \omega(G)$.
- (2) $\alpha(G) \leq \theta(G)$.
- (3) $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$.
- (4) $\theta(G) = \chi(\bar{G})$.
- (5) $\alpha(G) \leq \chi(\bar{G})$.

Démonstration. (1) Les arêtes d'une clique doivent avoir des couleurs différentes.

(2) Les sommets d'un ensemble indépendant doivent être dans des cliques distinctes.

(3) Les ensembles indépendants de G sont des cliques dans \bar{G} .

(4) Un coloriage de \bar{G} est équivalent à une partition de V en clique.

(5) Découle de (2) et (4). □



Figure 5.6 – (a) Une version originale du jeu de Sir William Rowan Hamilton “Icosian Game,” avec une description, la plaque qui indique que le jeu était breveté, et (b) le graphe qui lui correspond.

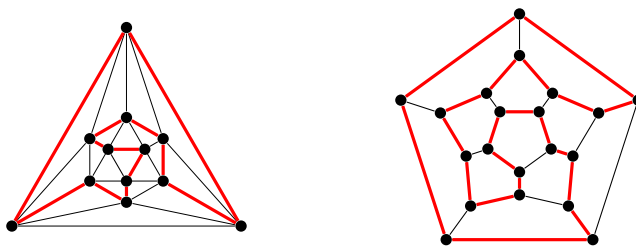
5.6. Cycle Hamiltonien

En 1857, le mathématicien et astronome britannique William Rowan Hamilton invente un jeu appelé l’“Icosian Game”. Une image de ce jeu est donné sur la figure 5.6. La description originale du jeu, en anglais, est donné ci-dessous :

In this new Game (invented by Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL.D., &c., of Dublin, and by him named Icosian from a Greek word signifying ‘twenty’) a player is to place the whole or part of a set of twenty numbered pieces or men upon the points or in the holes of a board, represented by the diagram above drawn, in such a manner as always to proceed along the lines of the figure, and also to fulfill certain other conditions, which may in various ways be assigned by another player. Ingenuity and skill may thus be exercised in proposing as well as in resolving problems of the game. For example, the first of the two players may place the fist five pieces in any five consecutive holes, and then require the second player to place the remaining fifteen men consecutively in such a manner that the succession may be cyclical, that is, so that No. 20 may be adjacent to No. 1 ; and it is always possible to answer any question of this kind. Thus, if B C D F G be the five given initial points, it is allowed to complete the succession by following the alphabetical order of the twenty consonants, as suggested by the diagram itself; but after placing the piece No. 6 in hole H, as before, it is also allowed (by the supposed conditions) to put No. 7 in X instead of J, and then to conclude with the succession, W R S T V J K L M N P Q Z. Other Examples of Icosian Problems, with solutions of some of them, will be found in the following page.

Définition 5.57. Un *chemin hamiltonien* sur un graphe G est un chemin $a_0 - a_1 - \dots - a_m$ avec $V = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$. En d’autres mots, un chemin hamiltonien visite chaque sommet exactement une fois. Si $a_m = a_0$, on parle de *cycle hamiltonien*.

Exemple 5.58. La figure suivante montre des exemples de cycles hamiltoniens sur l’icosahédre et sur le dodécahédre :



Remarquez que ces cycles hamiltoniens ne sont pas uniques. ◇

On pourrait penser que les cycles hamiltoniens sont similaires aux cycles eulériens : au lieu de traverser chaque arête exactement une fois, on veut traverser chaque sommet exactement une fois. Néanmoins, il s’agit d’objets complètement différents. La théorie de la complexité révèle qu’une caractérisation simple des graphes qui possèdent un cycle hamiltonien est improbable.

De façons intuitive, il est clair que le problème de trouver un cycle hamiltonien devient plus facile si le graphe a beaucoup d'arêtes. Mais combien d'arêtes sont nécessaires ? Le résultat suivant de Dirac donne une borne possible.

Théorème 5.59 (Théorème de Dirac). *Tout graphe sur n sommets dont le degré de chaque sommet est d'au moins $n/2$ possède un cycle hamiltonien.*

Démonstration. On utilise une récurrence sur le nombre de sommets non adjacents dans le graphe G . Si G n'a pas de sommets qui ne sont pas voisins, alors c'est un graphe complet. Comme on suppose que tout sommet est de degré au moins $n/2$, on en déduit que G est un graphe complet avec au moins 3 arêtes, et contient de manière évident un cycle hamiltonien.

Pour l'étape de récurrence, soit x et y deux sommets non adjacents de G . Considerons le graphe G' qui découle de G en ajoutant une arête e entre x et y . Alors G' a moins de sommets qui ne sont pas voisins, et admet donc un cycle hamiltonien par hypothèse de récurrence. Si ce cycle n'utilise pas l'arête e , on a fini car il s'agit également d'un cycle hamiltonien dans G . Sinon, il existe un chemin hamiltonien dans G de x à y , disons $x = v_1 - v_2 - \dots - v_{n-1} - v_n = y$. Comme x et y sont de degré au moins $n/2$, il existe un indice i tel que y est voisin de v_i et x est voisin de v_{i+1} . (Sinon, quand v_i est voisin de y , v_{i+1} n'est pas voisin de x , et comme il existe au moins $n/2$ indices $i > 1$ tel que v_i est voisin de y , il resterait trop peu de voisins pour x). Ainsi

$$x - v_2 - v_3 - \dots - v_i - y - v_{n-1} - v_{n-2} - \dots - v_{i+1} - x$$

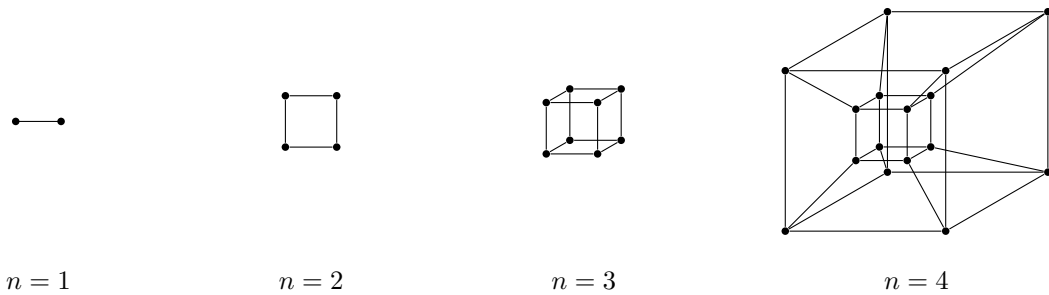
est un cycle hamiltonien de G . □

5.7. Exemple : L'hypercube

Dans cette section on va appliquer certains des concepts que nous avons développés dans ce chapitre sur l'hypercube.

Définition 5.60. La *distance de Hamming* $d_H(x, y)$ entre deux vecteurs binaires $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ est le nombre de positions où les deux vecteurs diffèrent : $d_H(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$. Le *poids de Hamming* $\text{wgt}_H(x)$ d'un vecteur x est $d_H(x, 0)$, avec 0 le vecteur tout à zéro. C'est-à-dire que le poids de Hamming est le nombre de coordonnées non nulles. Le graphe de l'hypercube ou simplement l'hypercube \mathcal{H}_n est le graphe $G = (\{0, 1\}^n, E)$ avec $E = \{(x, y) \mid d_H(x, y) = 1\}$.

Exemple 5.61. Voici les hypercubes pour $n = 1, 2, 3, 4$:



◇

Comme on l'a mentionné dans les dernières sections, il est difficile de déterminer le nombre chromatique ou le nombre d'indépendance de graphe généraux, ou de déterminer si un tel graphe admet un cycle hamiltonien. Mais, pour la famille des hypercubes, ces problèmes se résolvent facilement.

Lemme 5.62. Soit $x, y \in \{0, 1\}^n$. Alors

$$\text{wgt}_H(x + y) = \text{wgt}_H(x) + \text{wgt}_H(y) - 2\text{wgt}_H(xy),$$

avec $x + y$ la somme binaire terme à terme de x et y , et xy le produit terme à terme de x et y .

Démonstration. Il suffit de montrer l'affirmation pour $n = 1$, car la fonction poids est additive sur les coordonnées. Une inspection de toutes les valeurs possibles pour x et y nous donne alors le résultat. □

Théorème 5.63. *On a les résultats suivants :*

- (1) $\chi(\mathcal{H}_n) = \omega(\mathcal{H}_n) = 2$.
- (2) $\alpha(\mathcal{H}_n) = \theta(\mathcal{H}_n) = 2^{n-1}$.
- (3) \mathcal{H}_n admet un cycle hamiltonien.

Démonstration. (1) Soit f l'application de $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ qui associe 0 à tous les x de poids pair, et 1 à tous les x de poids impair. Pour montrer qu'il s'agit d'un coloriage valide de l'hypercube, il suffit de montrer que tous les vecteurs de poids pair (impair) ne sont pas connectés les uns aux autres dans \mathcal{H}_n . Les voisins de $x \in \{0, 1\}^n$ sont les vecteurs $x + e_i$, $i = 1, \dots, n$, avec e_i égal à un en une seule coordonnée i . Ainsi, par le lemme ??, $\text{wgt}_H(x + e_i) \equiv \text{wgt}_H(x) + 1 \pmod{2}$, ce qui montre que la parité du poids de x est différente de celles de tous ses voisins. Cela montre que $\chi(\mathcal{H}_n) = 2$. Comme \mathcal{H}_n a des cliques de taille 2 (chaque arête), on a aussi $\omega(\mathcal{H}_n) \geq 2$, de telle manière que dans le théorème 5.56 (1) on ait égalité dans tous les cas.

(2) D'après la discussion ci-dessus, on sait que les vecteurs de poids pair ne sont pas connectés ensemble, ils forment donc un ensemble indépendant. Leur nombre est $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{i} = 2^{n-1}$. Si S est un ensemble indépendant, soit S_0 l'intersection de S avec l'ensemble des mots de poids pair et S_1 son intersection avec les mots de poids impair. On a $|S_0| + |S_1| = |S|$. Comme S est indépendant, $S_0 + e_1$ est d'intersection vide avec S_1 , où $S_0 + e_1 = \{x + e_1 \mid x \in S_0\}$.

Ainsi, $|S_1| \leq 2^{n-1} - |S_0 + e_1| = 2^{n-1} - |S_0|$, et donc $|S| \leq 2^{n-1}$. Cela montre que $\alpha(\mathcal{H}_n) = 2^{n-1}$. D'un autre côté, $\theta(\mathcal{H}_n) \leq 2^{n-1}$, car on peut partitionner \mathcal{H}_n en 2^{n-1} 2-cliques de la forme $\{x, x + e_1\}$ où x décrit tous les vecteurs de poids pair. En appliquant le théorème 5.56 (2) on voit qu'on a des égalités de partout.

(3) On fait une récurrence sur n . Si $n = 1$, alors il existe bien un cycle hamiltonien. Supposons que $n > 1$. Alors \mathcal{H}_{n-1} a un cycle hamiltonien, disons

$$v_1 - v_2 - \dots - v_{2^{n-1}} - v_1,$$

avec $\{v_1, \dots, v_{2^{n-1}}\} = \{0, 1\}^{n-1}$. De là, on construit un cycle hamiltonien pour \mathcal{H}_n de la façon suivante. Pour $v \in \{0, 1\}^{n-1}$ on note $(1 \mid v)$ le vecteur qui a pour première coordonnée 1, et pour les restantes les mêmes que v . De manière similaire, on définit $(0 \mid v)$. Alors, le cycle suivant est un cycle hamiltonien de \mathcal{H}_n :

$$(0 \mid v_1) - (0 \mid v_2) - \dots - (0 \mid v_{2^{n-1}}) - (1 \mid v_{2^{n-1}}) - (1 \mid v_{2^{n-1}-1}) - \dots - (1 \mid v_2) - (1 \mid v_1) - (0 \mid v_1).$$

Ce qui termine la preuve. □

Exemple 5.64. Un cycle hamiltonien de \mathcal{H}_n est appelé un *code de Gray* de longueur n . En suivant la méthode de la preuve précédente, on peut obtenir de manière récursive des codes de Gray pour divers n :

Pour $n = 1$ on a

$$0, 1 .$$

Pour $n = 2$ on a

$$(00), (01), (11), (10) .$$

Pour $n = 3$ on a

$$(000), (001), (011), (010), (110), (111), (101), (100) .$$

Pour $n = 4$ on a

$$(0000), (0001), (0011), (0010), (0110), (0111), (0101), (0100), \\ (1100), (1101), (1111), (1110), (1010), (1011), (1001), (1000) .$$

◇