ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Section d'Informatique et de Systèmes de Communication

Corrigé de la série 1 14 Septembre 2009

1. Théorie des ensembles

(1)	Vrai	(12)	Vrai
(2)	Vrai	(13)	Vrai
(3)	Faux	(14)	Vrai
(4)	Vrai	(15)	Vrai
(5)	Faux	(16)	Faux
(6)	Faux	(17)	Vrai
(7)	Vrai	(18)	Vrai
(8)	Vrai	(19)	Faux
(9)	Faux	(20)	Vrai
(10)	Vrai	(21)	Faux
(11)	Vrai	(22)	Faux

Quelques explications pour les points ci-dessus: Remarquons tout d'abord que l'écriture $u, v \in X$ veut dire "$u \in X$ et $v \in X$" et non pas "$\{u, v\} \in X$". Nous avons $\{a\} \neq a$, $\{a\}$ étant l'ensemble constitué du seul élément a, et a étant cet élément. Un objet X peut être élément et ensemble à la fois. En effet, si X est un ensemble, c'est aussi un élément: on a $X \in \mathrm{Pot}(X)$ parce que $X \subseteq X$.

• (3): Ecrivons $S = \{\{ding\}, \{dong\}\}$. Nous avons $\{ding\} \in S$ et $\{dong\} \in S$, mais ce sont les seuls éléments dans S. Donc $\{ding, dong\} \notin S$.

• (4) et (5): Posons $T = \{a, b, c\}$. On a

$$\mathrm{Pot}(T) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Nous avons donc certainement $\{a\}, \{b\} \in \mathrm{Pot}(T)$. Donc,

$$\{\{a\}, \{b\}\} \subseteq \mathrm{Pot}(T), \tag{1}$$

ce qui établit (4). Nous pouvons réécrire l'expression (1) de manière équivalente avec le symbole d'appartenance $\in$ comme suit:

$$\{\{a\}, \{b\}\} \in \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(T)).$$

Mais $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(T)) \neq \mathrm{Pot}(T)$, et en effet $\{a\} \notin T$, ce qui implique que $\{\{a\}, \{b\}\} \notin \mathrm{Pot}(T)$.

• (7): L'ensemble vide $\emptyset$ est sous-ensemble de tout ensemble, donc en particulier

$$\emptyset \subseteq \{Loki, Balder\}.$$

Ceci est équivalent à l'affirmation (7).

• (11): Comme $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, on a $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble de mots (vecteurs) de réels de longueur deux, et comme $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble de mots de réels, on a $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^+$. En résumé,

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^+.$$

• (14): Nous avons $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ et aussi $\{\pi, 0.01, -7\} \subseteq \mathbb{R}$, et donc nous avons bien

$$\mathbb{N} \times \{\pi, 0.01, -7\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

donc $\mathbb{N} \times \{\pi, 0.01, -7\}$ est bien une relation sur $\mathbb{R}$.
• (15): (-1) est le mot de longueur 1 contenant comme seule composante -1; comme $-1 \in \mathbb{R}$, on a bien $(-1) \in \mathbb{R}^+$.
• (17): L'affirmation "$S \subseteq T$" signifie "S est sous-ensemble de T". L'affirmation "$S \in \text{Pot}(T)$" signifie que "S appartient aux sous-ensembles de T", ce qui peut aussi être lu "S est sous-ensemble de T". L'affirmation (17) est donc une tautologie (c'est-à-dire qu'elle est toujours vraie).
• (20): $\{1, 1, 2\}$ est l'ensemble contenant les éléments 1 et 2. $\{2, 1\}$ est aussi l'ensemble contenant les éléments 2 et 1. Donc l'affirmation est vraie. *La multiplicité ne compte pas pour les ensembles.* Par exemple:

$$\{a\} = \{a, a\} = \{a, a, a\} \qquad \text{et} \qquad \{a, b\} = \{a, a, b\} = \{a, a, b, b\} = \{a, a, a, b, b\}$$

Remarquons aussi que *L'ordre ne compte pas pour les ensembles.* Par exemple

$$\{a, b\} = \{b, a\} \qquad \text{et} \qquad \{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\}$$

• (21): Contrairement aux ensembles, *la multiplicité et l'ordre comptent pour les mots.* Deux mots sont égaux si et seulement s'ils ont la même longeur et chaque composante est égale. Par exemple, on a $(1, 1) \neq (1)$ et $(2, 1) \neq (1, 2)$ et aussi $(1, 1, 2) \neq (2, 1)$.
• (22) Nous avons $\text{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, et comme $\emptyset \in \{\emptyset\}$, il s'en suit que $(\emptyset), (\emptyset, \emptyset)$ et $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ appartiennent tous à $(\text{Pot}(\emptyset))^+$. Mais l'affirmation est fausse, car le mot vide () n'appartient pas à $(\text{Pot}(\emptyset))^+$, seulement à $(\text{Pot}(\emptyset))^*$.

2. Théorie des ensembles

(a) Supposons que $y \in f(A \cup B)$. Alors, il existe $x \in A \cup B$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in A$, alors $y \in f(A)$ et si $x \in B$, alors $y \in f(B)$. Ainsi, $y \in f(A) \cup f(B)$. Réciproquement, supposons que $y \in f(A) \cup f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. De même, si $y \in f(B)$, alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$. D'où, $y \in f(A \cup B)$.

(b) Supposons que $y \in f(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. D'où, $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$, ce qui montre que $y \in f(A) \cap f(B)$.

(c) Supposons que $y \in f^{-1}(C \cup D)$. Alors $f(y) =: x \in C \cup D$. Si $x \in C$, alors $f(y) \in C$, si bien que $y \in f^{-1}(C)$. De même, si $x \in D$, alors $y \in f^{-1}(D)$. D'où $y \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Ceci montre que $f^{-1}(C \cup D) \subseteq f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Réciproquement, supposons que $y \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Si $y \in f^{-1}(C)$, alors $f(y) =: x \in C$. De même, si $y \in f^{-1}(D)$, alors $f(y) \in D$. D'où, $f(y) \in C \cup D$, de sorte que $y \in f^{-1}(C \cup D)$. Ceci montre que $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C \cup D)$ et donc l'égalité des deux ensembles est démontrée.

(d) Soit $y \in f^{-1}(C \cap D)$. Alors $f(y) =: x \in C \cap D$ et donc $x \in C$ et $x \in D$. Par conséquent, $y \in f^{-1}(C)$ et $y \in f^{-1}(D)$ et ainsi $y \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Réciproquement, supposons que $y \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Alors $y \in f^{-1}(C)$ et $y \in f^{-1}(D)$, donc $f(y) \in C \cap D$. Il s'ensuit que $y \in f^{-1}(C \cap D)$.

3. Les tours de Hanoi

a) Soient E_1, E_2, E_3, les trois bâtons respectivement disposés de l'extrême gauche à l'extrême droite comme indiqué sur la figure. Supposons que les n disques soient numérotés de 1 à n, en commençant par le disque disposé le plus en haut.

Déplacer une tour de 1 disque de E_1 vers E_3 est trivial.

Pour déplacer une tour de 2 disques de E_1 vers E_3, on déplace le disque numéroté 1 de E_1 vers E_2, puis le disque numéroté 2 de E_1 vers E_3, puis le disque numéroté 1 de E_2 vers E_3.

Pour déplacer une tour de 3 disques de E_1 vers E_3, on déplace la tour des 2 disques numérotés 1 et 2, de E_1 vers E_2, puis le disque numéroté 3 de E_1 vers E_3, puis la tour des 2 disques numérotés 1 et 2 de E_2 vers E_3.

Pour déplacer une tour de 4 disques de E_1 vers E_3, on déplace la tour des 3 disques numérotés $1, 2$ et 3, de E_1 vers E_2, puis le disque numéroté 4 de E_1 vers E_3, puis la tour des 3 disques numérotés $1, 2$ t 3 de E_2 vers E_3.

Pour déplacer une tour de 5 disques de E_1 vers E_3, on déplace la tour des 4 disques numérotés $1, 2, 3$ et 4, de E_1 vers E_2, puis le disque numéroté 5 de E_1 vers E_3, puis la tour des 4 disques numérotés $1, 2, 3$ et 4 de E_2 vers E_3.

Ainsi, pour déplacer une tour de n disques de E_1 vers E_3, on déplace la tour des $n-1$ disques de E_1 vers E_2, puis le disque numéroté n de E_1 vers E_3, puis la tour des $n-1$ disques de E_2 vers E_3.

b) Soit D_n le nombre de déplacements de disques nécessaire au déplacement d'une tour du bâton de l'extrême gauche à celui l'extrême droite. Ainsi, le nombre de déplacements nécessaires pour une tour de n disques est deux fois le nombre de déplacements de la tour de $n-1$ premiers disques, auquel l'on rajoute le déplacement du disque numéroté n. Celà se traduit ainsi par l'équation donnée par

$$\begin{cases} D_1 = 1 \\ D_n = 2D_{n-1} + 1 \quad \text{si } n > 1 \end{cases}$$

L'on obtient ainsi que $D_1 = 1$, $D_2 = 2D_1 + 1 = 3$, $D_3 = 2D_2 + 1 = 7$, $D_4 = 2D_3 + 1 = 15$, et finalement $D_5 = 2D_4 + 1 = 31$.