ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 1 14 Septembre 2009

1. Théorie des ensembles

On rappelle que pour un ensemble S, $\text{Pot}(S)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de S. Par exemple si $S = \{1, 2\}$, on a $\text{Pot}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. ($\emptyset$ est l'ensemble vide.)

S^* est l'ensemble des mots sur S, donc si $S = \{1, 2\}$ on a $(), (1), (1, 2), (1, 1, 2), (2, 2, 1, 2, 1, 2) \in S^*$. $()$ denote le mot vide, formellement on a $() = \emptyset$ (la notation $()$ est utilisée pour indiquer que nous l'interprétons comme un mot). S^+ denote les mots *non vides* sur S. Donc $S^* = S^+ \cup \{()\}$.

Rappelons également que $\{1\} \neq 1$. On a

- $1 \in \mathbb{N}$
- $\{1\} \subset \mathbb{N}$
- $\{1\} \in \text{Pot}(\mathbb{N})$

On rappelle aussi qu'une relation entre deux ensembles A et B est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$. Une relation entre A et A est appelée une relation sur A.

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses:

(1) $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$
(2) $\{1, 2\} \in \text{Pot}(\mathbb{N})$
(3) $\{ding, dong\} \in \{\{ding\}, \{dong\}\}$
(4) $\{\{a\}, \{b\}\} \subseteq \text{Pot}(\{a, b, c\})$
(5) $\{\{a\}, \{b\}\} \in \text{Pot}(\{a, b, c\})$
(6) $\mathbb{N} \subseteq \text{Pot}(\mathbb{N})$
(7) $\emptyset \in \text{Pot}(\{Loki, Balder\})$
(8) $\mathbb{R} \in \text{Pot}(\mathbb{R})$
(9) $\{(0, 0), (1, 1)\} \in \mathbb{R}^2$
(10) $\{(\pi, 0.9999)\} \subseteq \mathbb{R}^2$
(11) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$
(12) $(1, sandman) \in \mathbb{N} \times \{sandman, puppet\}$
(13) $\{1, 2\} \times \{0.99\}$ est une relation entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$
(14) $\mathbb{N} \times \{\pi, 0.01, -7\}$ est une relation sur $\mathbb{R}$
(15) $(-1) \in \mathbb{R}^+$
(16) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair}\} \times \{2\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
(17) $S \subseteq T \iff S \in \text{Pot}(T)$
(18) $(\mathbb{N} \times \{\pi, e, 1.6180\}) \cap (\{\pi, e, 1.6180\} \times \mathbb{N}) = \emptyset$
(19) $\{\{1\}, \{2\}\} \times \{1, 2, 3\}$ est une relation sur $\text{Pot}(\mathbb{N})$
(20) $\{1, 1, 2\} = \{2, 1\}$
(21) $(1, 1, 2) = (2, 1)$
(22) $\{(), (\emptyset), (\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \subset (\text{Pot}(\emptyset))^+$

2. Théorie des ensembles

Soient X et Y des ensembles non vides et soit $f\colon X \to Y$ une application. De plus, soient $A, B \subseteq X$ et $C, D \subseteq Y$. Montrer les assertions suivantes:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

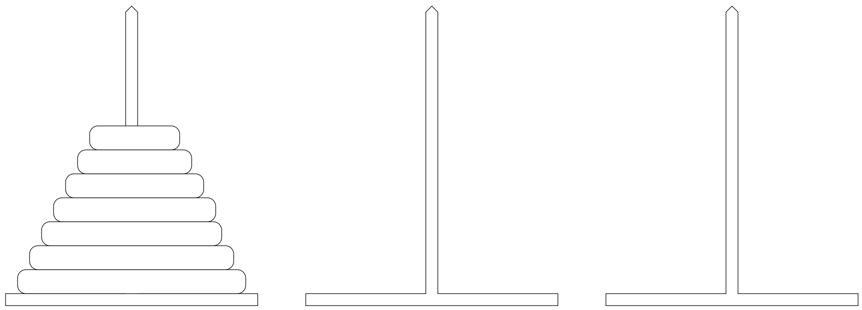
(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

3. Les tours de Hanoi

On considère le problème suivant: On a n disques de différents diamètres qui se trouvent sur un bâton. Les disques sont ordonnés selon leur diamètre, avec le plus grand disque au fond. On dispose aussi de deux bâtons, initialement vides.



On aimerait déplacer la tour du premier bâton vers le dernier bâton. Le seul mouvement admis est d'enlever le plus haut élément d'une tour et de le rajouter sur un bâton vide ou un bâton dont le plus haut disque a un diamètre plus grand. Un disque ne peut donc jamais être posé sur un disque de plus petit diamètre.

a) Trouvez une procédure qui donne la suite de mouvements à effectuer pour déplacer une tour de taille n pour $n = 3, 4, 5$. Utiliser si possible le résultat obtenu pour $n - 1$ pour trouver le résultat pour n.

b) Calculer le nombre de mouvements qui sont effectués pour déplacer une tour de taille n pour $n = 5$.