ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 2 28 Septembre 2009

1. *Spécification formelle I*

Considérons le problème suivant: étant donné un ensemble fini de nombres naturels S, les éléments de S sont-ils tous pairs?

Nous voulons trouver une spécification formelle de ce problème, c'est-à-dire:

- l'ensemble des inputs possibles I
- l'ensemble des outputs possibles O
- la dépendance relationnelle entre les deux $R \subseteq I \times O$, avec

$$(i, o) \in R \iff o \text{ est un output valable quand l'input } i \text{ est donné au problème}$$

a) Indiquer lesquels des éléments suivants sont dans I: $4, \quad 7, \quad \mathbb{N}, \quad \{1, 2\}, \quad \{1\}, \quad \{1, \ldots, 100\}, \quad \mathrm{Pot}(\mathbb{N}), \quad \{-1, 100, 2\}$.

b) Que vaut I?

c) Puisqu'il s'agit d'un problème de décision, on sait que $O = \{vrai, faux\}$. Indiquer lesquels des éléments suivants sont dans R: $(2, vrai), \quad (\{2\}, vrai), \quad (\mathbb{N}, faux), \quad (7, faux), \quad (\{1, \ldots, 100\}, faux), \quad (\{1, 2, 4, 6\}, vrai)$.

d) Que vaut R?

Considérons maintenant le problème suivant: étant donné un ensemble fini de nombres naturels S, combien y a-t-il d'éléments de S qui sont pairs?

On veut trouver une spécification formelle (I_2, O_2, R_2) de ce problème.

e) Que vaut I_2?

f) Que vaut O_2?

g) Indiquer lesquels des éléments suivants sont dans R_2: $(\{1, 2, 3\}, 1), \quad (\{1, 8, 6, 2\}, 3), \quad (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 4\})$.

h) Étant donné un ensemble S, exprimer de manière formelle l'assertion suivante: "Il existe un sous-ensemble de S de taille n, dont tous les éléments sont pairs". (utiliser la partie d)).

i) Que vaut R_2?

2. *Spécification formelle II*

Donner des spécifications formelles des problèmes suivants:

a) Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer si n est impair.

b) Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$, quel est son plus grand diviseur qui soit inférieur à n?

c) Un *sous-mot* d'un mot W est un mot dont les composantes se trouvent aussi dans W, et ceci consécutivement et dans le même ordre. Par exemple, (m, i, c, r, o) est un sous-mot de $(m, i, c, r, o, s, o, f, t)$, $(4, 7, 11)$ est un sous-mot de $(9, 3, 4, 7, 11, 5)$, mais (n, f, x) n'est pas un sous-mot de (n, o, f, x) et $(\text{rouge}, \text{bleu})$ n'est pas non plus un sous-mot de $(\text{bleu}, \text{rouge}, \text{vert})$.

Le problème est le suivant: Soit $\mathcal{A} = \{a, b, \ldots, z\}$, et soient $S = (s_1, \ldots, s_n)$ et $T = (t_1, \ldots, t_m)$ des mots non vides sur $\mathcal{A}$ (i.e., $S, T \in \mathcal{A}^+$). Est-ce que S est un sous-mot de T?

3. Induction I

Prouver par induction les affirmations suivantes:

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 10$ on a $2^n > n^3$.

d) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on a $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

e) pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, n est un produit de nombres premiers (utiliser l'induction forte).

4. Induction II

a) Prouver par induction que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \geq -1$, on a

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

b) Prouver par induction que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

5. La notation O

a) Montrer que $n^2 + 100 = O(n^2)$, c'est à dire trouver des éléments c et n_0 satisfaisant la définition. Montrer maintenant que $n^2 + 100 = \theta(n^2)$.

b) Supposons que $f(n) = O(g(n))$ et $g(n) = O(h(n))$. Montrer que $f(n) = O(h(n))$.

c) Montrer que $n = \Omega(\log_2(n))$.

d) Supposons que $f(n) = O(g(n))$. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ on a $a \cdot f(n) = O(b \cdot g(n))$

e) Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$, on a $n^d = O(a^n)$. (Indice: prendre le logarithme des deux fonctions).

f) Remplir le tableau suivant par vrai ou faux.

$f(n)$	$g(n)$	$f(n) = O(g(n))$	$f(n) = \Omega(g(n))$	$f(n) = \theta(g(n))$	$f(n) = o(g(n))$
$n^{1/100}$	$\sqrt{n}$				
$\ln(n)$	$\ln^2(n)$				
$\sqrt{n}$	$\ln^2(n)$				
2^n	$n!$				
$\log_2(n)$	$\log_3(n)$				
$\ln(n)$	$\ln\ln(n)$				
$2^{\ln(n)}$	n^2				
2^n	$n^{\ln\ln(n)}$				
$2^{\sqrt{\ln(n)}}$	$\sqrt{n}$				