ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 4 12/10/2009

1. Graphes I

a) Si la première ligne de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté G ne contient que des 1 alors G est connexe. Vrai ou Faux? (Justifier.)

b) Dessiner un arbre binaire dans lequel tous les sommets ont degré 0 ou 2, mais qui n'est pas un arbre AVL.

c) Soit T soit un arbre binaire de hauteur h. Montrer que T peut avoir au plus $2^{h+1} - 1$ sommets.

d) Soit T un arbre binaire avec n sommets. Quel est la plus petite hauteur que peut avoir T? Quel est la plus grande hauteur que peut avoir T?

e) Soit G un graphe non orienté avec n sommets, et dans lequel tous les sommets ont degré d (un tel graphe est appelé *d-régulier*). Nous supposons aussi que la diagonale de sa matrice d'adjacence ne contient que des 0.

Montrer que si n est impair alors d doit être pair. (*Indice:* compter le nombre d'arêtes.)

2. Graphes II

a) On rappelle qu'un arbre est un graphe connexe et sans cycles, et la formule d'Euler pour les arbres:

Si un arbre T a n sommets alors T a $n - 1$ arêtes.

La *composante connexe* d'un sommet x consiste en tous les sommets y pour lesquels il existe un chemin de x à y.

Soit G un graphe (non orienté) sans cycles, avec n sommets, et c composantes connexes distinctes. Combien G a-t-il d'arêtes? Prouver le résultat.

b) Soit $G = (V, E)$ un graphe *orienté*. Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G comme suit:

$$V' = V, \quad E' = E \cup \{(a, b) \in V \times V \;\Big|\; (b, a) \in E\}$$

Un graphe orienté G est dit *faiblement connexe* si pour tous $x, y \in V$ distincts il existe un chemin de x à y dans le graphe G' correspondant.

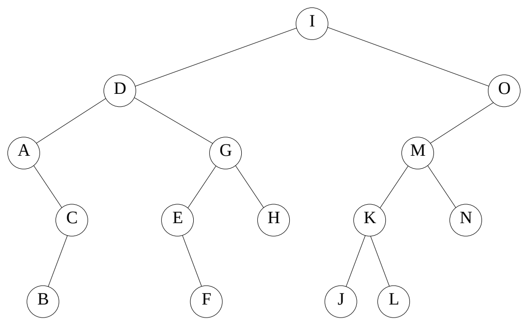
Un graphe orienté G est dit *fortement connexe* si pour tous $x, y \in V$ distincts il existe un chemin de x à y dans G lui-même.

i) Dessiner un graphe faiblement connexe mais pas fortement connexe.

ii) Soit G un graphe fortement connexe avec $|V| \geq 2$. Le graphe G peut-il être sans cycles? Si oui donner un exemple d'un tel graphe, si non donner une preuve.

3. Arbres

a) Donner les suites de sommets obtenus en parcourant l'arbre binaire suivant en l'ordre preorder, inorder et postorder.



b) Vérifier qu'il s'agit bien d'un arbre de recherche binaire pour l'ordre alphabétique.

c) Prouver qu'un arbre binaire est un arbre de recherche si et seulement si la suite des valeurs obtenue en prenant les clés dans un parcours inorder est croissante.

d) Effacer le sommet D de manière à préserver la structure d'arbre de recherche.

e) Écrire un algorithme pour effacer dans un arbre de recherche. Donner un argument qui justifie cet algorithme.

4. Algorithmes récursifs: Le diamètre d'un arbre binaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour deux sommets $a, b \in V$, on définit la *distance* $d(a, b)$ comme étant la longueur du plus court chemin de a à b. Le *diamètre* de G est défini comme étant la distance maximale dans le graphe, i.e.

$$\mathrm{diam}(G) := \max_{a,b \in V} d(a, b).$$

a) Soit T un arbre binaire, et soient T_1 et T_2 ses sous-arbres gauche et droit. Exprimer le diamètre puis la hauteur de T en fonction des diamètres et hauteurs de T_1 et T_2.

b) Construire un algorithme qui calcule le diamètre d'un *arbre binaire* en temps linéaire (en le nombre de sommets).

(Indice: Il faut construire par récurrence un algorithme qui, étant donné un arbre binaire, retourne sa hauteur et son diamètre en temps linéaire).