

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 6

26 October 2009

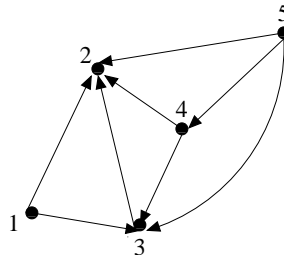
1. Algorithmes par induction: Le problème de la célébrité

Nous aimerions trouver une célébrité dans un ensemble V de n personnes. Pour modéliser ce problème, nous caractérisons une célébrité comme suit: C'est une personne qui est connue de tout le monde, mais qui ne connaît personne.

Pour résoudre ce problème, nous avons le droit de poser un seul type de question: si $a, b \in V$ sont des personnes, nous pouvons demander à a s'il connaît b , et il nous répondra par "oui" ou "non". Le problème est donc le suivant: étant donné un groupe de personnes V contenant une célébrité, trouver la célébrité en posant de telles questions.

Remarquons qu'on peut modéliser ce problème comme un problème de graphe orienté (V, E) : L'ensemble V est l'ensemble des personnes, et on met une flèche de $a \in V$ à $b \in V$ si et seulement si a connaît b . Poser la question "a connaît-il b?" revient alors à vérifier si l'élément (a, b) de la matrice d'adjacence vaut 1.

a) Dans le graphe suivant y-a-t il une célébrité?



- b) Supposons que nous avons un ensemble de personnes V dont certaines se connaissent (on obtient donc un graphe orienté (V, E)). Montrer qu'il peut y avoir au plus une célébrité dans V .
- c) Supposons que le sommet i est une célébrité. Que peut-on dire sur la ligne i et la colonne i de la matrice d'adjacence du graphe?
- d) Décrire l'algorithme naïf pour résoudre le problème de la célébrité, étant donné la matrice d'adjacence du graphe. Donner l'ordre du nombre de questions qu'il faut poser (c'est-à-dire le nombre d'entrées dans la matrice qu'il faut regarder) en fonction du nombre de personnes $n = |V|$.
- e) Observons que pour tout $a, b \in V$, on a
- Si a connaît b , alors a ne peut pas être une célébrité.
 - Si a ne connaît pas b , alors b ne peut pas être une célébrité.

Nous voulons utiliser ce fait pour construire par induction un algorithme $O(n)$ pour résoudre le problème de la célébrité.

Pour simplifier, nous supposons qu'il y a en effet une célébrité dans G , et qu'il s'agit donc juste de la trouver.

- (i) Base. Montrer que pour $n = 2$ on peut résoudre ce problème en posant une seule question.
- (ii) Pas. Supposons que nous savons résoudre le problème pour n personnes en posant $T(n)$ questions. Montrer qu'on peut le résoudre pour $n + 1$ personnes en posant $T(n) + 1$ questions.
- (iii) En déduire un algorithme pour résoudre le problème pour n personnes, et donner le nombre de questions qui sont nécessaires.

2. Sac à dos 0/1

a) Trouver une solution optimale (i.e. objets et valeur optimale) au problème du sac à dos 0/1 suivant:

$W = 20,$

objet	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
valeur	22	15	8	15	15
poids	11	7	6	7	3

- b) La solution optimale dans le problème ci-dessus est-elle unique? Si ce n'est pas le cas, donner toutes les solutions optimales. Peut-on adapter l'algorithme du point a) pour trouver toutes les solutions optimales? Comment faire?
- c) Montrer que si on a un problème de sac à dos avec n objets, alors il peut y avoir au plus 2^n solutions optimales.
- d) Montrer que pour tout n pair, il y a un choix de W , des v_i et des w_i tel qu'il y a au moins $2^{n/2}$ solutions optimales.

3. Multiplication de plusieurs matrices

Supposons que nous avons 4 matrices aux formats suivants:

Matrice	Format
A_1	5×10
A_2	10×3
A_3	3×12
A_4	12×5

Calculer la disposition de parenthèses de l'expression $A_1 \cdots A_4$ qui minimise le nombre de multiplications nécessaires.