Exercice 4.1. Trouver les 16 types possibles de posets à 4 éléments.

Exercice 4.2. Soient R et S des relations sur $A \times B$ et $C \times D$, respectivement. Le *produit* $R \times S$ est une relation sur $(A \times C) \times (B \times D)$ telle que $((a, c), (b, d)) \in R \times S$ ssi $(a, b) \in R$ et $(c, d) \in S$.

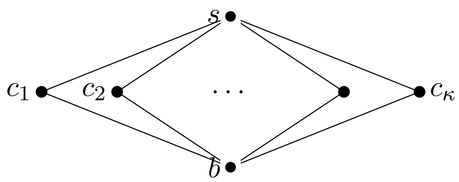
1. Montrer que si R et S sont des relations d'ordre sur les ensembles A et B, la relation $R \times S$ est une relation d'ordre sur $A \times B$. On montre ainsi que le produit de deux posets est un poset. De même, montrer que le produit de deux treillis est un treillis.
2. Sous quelle condition est-il vrai que le produit de $(\mathrm{Div}(n), |)$ et $(\mathrm{Div}(m), |)$ a la même structure que $(\mathrm{Div}(nm), |)$? (Donner une démonstration de votre réponse.)

Exercice 4.3. On dit qu'un poset $(R, \preccurlyeq)$ est *bien-fondé* s'il n'existe nulle chaîne infinie $\cdots x_{n+1} \prec x_n \prec \cdots \prec x_1$ d'éléments décroissants. On dit qu'un poset $(R, \preccurlyeq)$ est *dense* si pour tous $x, z \in R$ tels que $x \prec z$, il existe $y \in R$ tel que $x \prec y \prec z$.

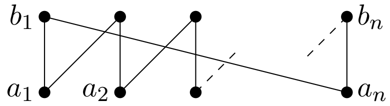
1. $(\mathbb{Q}, \leq)$ forme-t-il un poset bien-fondé ? un poset dense ?
2. L'ensemble des mots formé de lettres de l'alphabet muni de l'ordre lexicographique (l'ordre du dictionnaire) est-t-il un poset bien-fondé ? un poset dense ?
3. On dit qu'un poset $(R, \preccurlyeq)$ est *bien-ordonné* quand l'ordre est total et que toute partie de R possède un plus petit élément. Montrez qu'un poset est bien ordonné ssi il est bien-fondé et totalement ordonné.

Exercice 4.4. Calculez la largeur des treillis suivants

1. $\mathcal{A}_\kappa$ est une antichaîne de cardinal κ.
2. $\mathcal{M}_\kappa$ correspond au diagramme de Hasse ci-dessous.



3. $\mathcal{C}_n$, où $n \in \mathbb{N}$, qui correspond au diagramme en couronne ci-dessous



4. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ où X est un ensemble fini.

Exercice 4.5. Soit $(R, \leq)$ un poset de cardinal supérieur à $ab + 1$ avec $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que $(R, \leq)$ possède soit un antichaîne de longueur supérieure à $a+1$, soit une chaîne de longueur supérieure à $b + 1$.

Exercice 4.6. Soit n un entier qui n'est divisible par aucun carré. Soit μ la fonction de Möbius du treillis $(\mathrm{Div}(n), |)$. Montrer que $\mu(n) = (-1)^t$ où t est le nombre de facteurs premiers de n. (Indice : on pourra établir une relation entre les diviseurs de n et un treillis Booléen approprié).

Exercice 4.7. Soit $(P, \leq)$ un poset. On appelle *noyau linéaire* du poset $(P, \leq)$ et on note $K(P)$ l'ensemble des éléments de P comparables à tous les éléments de P. Montrez que $K(P)$ est l'intersection de toutes les chaînes maximales de P. (On montrera avec soin que tout élément de P appartient à une chaîne maximale).

Exercice 4.8. Soit $(R, \preccurlyeq)$ un poset.

1. Soient $a, b \in R$ tels que $a \not\preccurlyeq b$. Montrer que la relation définie par

$$x \preccurlyeq^* y \quad \text{si} \begin{cases} x \preccurlyeq y \\ \text{ou} \\ x \preccurlyeq b \text{ et } a \preccurlyeq y \end{cases}$$

   est un ordre sur R.

2. En supposant que R est fini, montrer que l'ordre partiel $\preccurlyeq$ est l'intersection de tous les ordres totaux qui contiennent $\preccurlyeq$.
3. On considère le poset $(\mathcal{PO}_{\preccurlyeq}(R), \subseteq)$ des ordres partiels sur R contenant $\preccurlyeq$ ordonnés par l'inclusion. Montrez que les éléments maximaux de ce poset sont les ordres totaux
4. Montrez que toute chaîne C de ce poset est majorée (on pourra montrer que la relation $\leq = \cup_{\trianglelefteq \in C} \trianglelefteq$ est un ordre dans ce cas).
5. En déduire que l'ordre partiel $\preccurlyeq$ est l'intersection de tous les ordres totaux qui contiennent $\preccurlyeq$ quelque soit le cardinal de R.