Exercice 6.1. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a pas d'autres polyèdres réguliers convexes que les 5 solides de Platon (tétraèdre, cube, octaèdre, dodecaèdre, isocaèdre). On remarque que le graphe de tels polyèdres est un graphe planaire tel que chacun des n sommets soit de même degré d et que chacune des f faces soit adjacente à k arêtes. En notant de plus m le nombre d'arêtes, établir l'équation suivante

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$$

et montrer que seulement 5 valeurs sont possibles pour (d, k, n, m, f). Conclure.

Exercice 6.2. Soit G un graphe planaire tel que tout sommet soit de degré pair. Montrer que la carte induite par les faces d'un dessin de G dans le plan est 2-coloriable. (Indice : on pourra faire une récurrence sur le nombre d'arêtes de G).

Exercice 6.3. Montrer qu'un graphe G a au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes (où $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de G).