Exercice R.1. Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V (ainsi, tout vecteur $x \in V$ est une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{B}$). On suppose que V possède une seconde base $\mathcal{B}' = \{f_j\}_{j\in J}$. On se propose de démontrer que $\mathcal{B}'$ est également dénombrable.

1. Montrer que J est infini.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un ensemble fini $J_n \subseteq J$ tel que e_n appartienne au sous-espace engendré $\langle f_j;\ j \in J_n\rangle$.
3. Montrer que $J = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} J_n$.
4. Conclure.

Exercice R.2. Donner une DNF, une CNF et une forme polynomiale de $\phi(x, y, z) = \text{NAND}(\text{NAND}(x, y), z)$. Montrer que le connecteur NAND et la constante 1 permettent d'exprimer toute fonction booléenne. Dessiner un diagramme calculant OR à l'aide de NAND et de 1 uniquement.

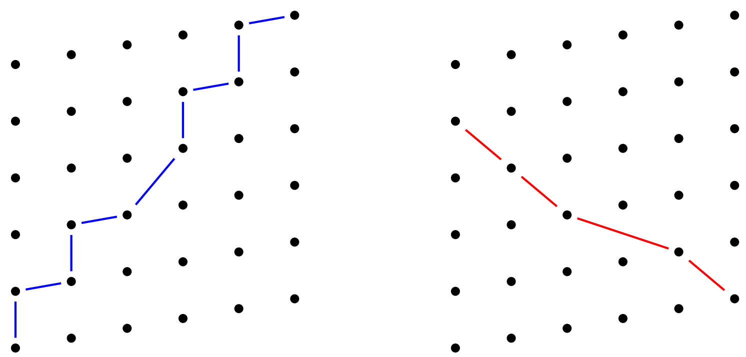
Exercice R.3. On dit qu'une relation d'équivalence $\sim$ définie sur $\mathbb{Z}$ est une congruence si elle vérifie que pour tous $a, x, y \in \mathbb{Z}$, si $x \sim y$ alors $a + x \sim a + y$.
Montrez que $\sim$ est forcément l'égalité ou bien il existe un entier q tel que $\sim$ est la relation de congruence modulo q.

Exercice R.4. Soit $x \geq 1$. Simplifier la somme suivante

$$S(x) = \sum_{1\leq n\leq x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$$

où $\mu(n)$ représente la fonction de Möbius.

Exercice R.5. Soient n points du plan $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ tels que tous les x_i et tous les x_j soient distincts. Un *chemin polygonal de pente positive* sur les points est un chemin qui connecte certains points entre eux par des segments de pente positive. On définit de même un *chemin polygonal de pente négative*. Un exemple est donné sur la figure plus bas. Montrer que si $n = ab + 1$, alors il existe soit un chemin polygonal de pente positive et de longueur $a + 1$, soit un chemin polygonal de pente négative et de longueur $b + 1$.



(a) Pente positive (b) Pente négative

Exercice R.6. Pour quelles valeurs de n peut-on trouver un graphe simple à n sommets dont les degrés sont deux à deux distincts ?

Exercice R.7. Soit $n \geq 5$. On considère un dessin arbitraire du graphe complet K_n dans le plan. Montrer qu'il y a au moins $\frac{1}{5}\binom{n}{4}$ couples d'arêtes qui se croisent. (Indication : on utilisera le fait que K_5 n'est pas planaire)

Exercice R.8. Montrer que le développement décimal du réel $(6+\sqrt{37})^{666}$ possède au moins 666 zéros consécutifs juste après la virgule.