

## Composition de mathématiques discrètes

12.1.2010

- Utilisez une feuille différente pour chaque problème et numérotez les pages.
- Ecrivez votre nom et le numéro du problème traité en haut de chaque feuille supplémentaire.
- L'usage de documents et de matériel électronique est prohibé durant cette épreuve. Seul un formulaire personnel rédigé sur une feuille A4 recto-verso est toléré.
- Soixante cinq points sont nécessaires pour valider l'examen (et obtenir 4).
- La durée de l'épreuve est de trois heures. Bonne chance.

Nom :

Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4
10 points	20 points	20 points	20 points
Problème 5	Problème 6	Problème 7	Problème 8
20 points	20 points	20 points	20 points

<b>Total</b>

Nombre de pages utilisées : 18 pages + .....pages supplémentaires.

### Notations utilisées pour l'examen

1. Le symbole  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs.  
Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $[n]$  désigne l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ .
2. La lettre  $\mu$  désigne la fonction de Möbius.

**Problème 1 [10 points].** Soient  $R_0 = \mathbb{Z}$  et, pour tout  $i \geq 1$ ,  $R_i = R_{i-1}[[x_i]]$ , c'est-à-dire que  $R_i$  est l'anneau des séries formelles à coefficient dans  $R_{i-1}$ . Pour quelles valeurs de  $i$ , l'anneau  $R_i$  est-il dénombrable ? Justifier.

**Solution :**

1.  $R_0 = \mathbb{Z}$  est dénombrable.
2.  $R_1 = \mathbb{Z}[[x_1]]$  est en réalité isomorphe à l'ensemble  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  des suites à valeur dans  $\mathbb{Z}$  et contient à ce titre l'ensemble  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  des suites de zéros et de uns. On peut aussi voir ce fait en considérant les séries formelles de la forme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \epsilon_n (x_1)^n$  avec  $\epsilon_n \in \{0, 1\}$  pour tout entier  $n$ . Il a été établi en cours que  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  est infini non dénombrable, donc  $R_1$  n'est pas dénombrable.
3. Pour  $i \geq 1$ ,  $R_i$  est toujours inclus dans  $R_{i+1}$  (il s'agit par exemple des constantes de  $R_{i+1}$ ). Comme  $R_1$  n'est déjà pas dénombrable, les  $R_i$  ne sont pas dénombrables pour tout  $i \geq 1$ .

**Problème 2 [20 points].**

1. Soit  $(A_i)_{0 \leq i \leq k-1}$  une famille d'ensembles finis. Si  $I \subseteq [k]$ , on note  $A_I$  l'intersection  $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$ . Montrer que

$$\left| \bigcup_{i=0}^{k-1} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [k]} (-1)^{|I|+1} |A_I|.$$

2. Soit  $m \geq n$ . Vérifier que le nombre  $\sigma$  de surjections de  $[m]$  dans  $[n]$  s'élève à

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

Indication : poser  $A_i = \{f : [m] \rightarrow [n]; \forall j \in [m], f(j) \neq i\}$ .

**Solution :**

1. Il s'agit du principe d'inclusion-exclusion généralisé à  $k$  ensembles. On procède par récurrence. Les cas  $k \leq 3$  ont été vus en cours.

En général, on a, en utilisant ce principe pour  $k = 2$ ,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right| = \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| + |A_{k+1}| - \left| \left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cap A_{k+1} \right|$$

On peut déjà appliquer l'hypothèse de récurrence au premier terme. Mais on a encore

$$\left| \left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cap A_{k+1} \right| = \left| \bigcup_{i=1}^k (A_i \cap A_{k+1}) \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [k]} (-1)^{|I|+1} |A_I \cap A_{k+1}| = - \sum_{J \subseteq [k+1], k+1 \in J} (-1)^{|J|+1} |A_J|$$

Dans les deux autres termes de la somme, on reconnaît les indices  $J \subseteq [k+1]$  avec  $k+1 \notin J$  et  $J = \{k+1\}$ . D'où finalement

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right| = \sum_{J \subseteq [k+1]} (-1)^{|J|+1} |A_J|.$$

2. On remarque que  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  égale l'ensemble des applications non-surjectives. De plus, pour tout  $I \subseteq [n]$ ,  $A_I$  désigne les applications dont l'image évite  $I$ . D'où  $|A_I| = (n-|I|)^m$ .

Donc

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} |A_I| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} (n-k)^m$$

car il y a  $\binom{n}{k}$  façons de choisir  $I$  quand  $|I| = k$ . Mais alors

$$\sigma = n^m - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

comme attendu.

**Problème 3 [20 points].** Soient  $\Sigma$  un ensemble fini et  $\Sigma^{(n)}$  la réunion des produits cartésiens  $\Sigma^{(n)} = \cup_{0 \leq i \leq n} \Sigma^i$ . On dit qu'une suite finie  $x = (x_1, \dots, x_k)$  de  $\Sigma^{(n)}$  est une *sous-suite* d'une autre suite  $y = (y_1, \dots, y_t) \in \Sigma^{(n)}$ , et on note  $x \leq y$ , s'il existe  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq t$  tels que  $x_j = y_{i_j}$  pour  $j = 1, \dots, k$ .

1. Montrer que  $(\Sigma^{(n)}, \leq)$  est un poset mais non un treillis lorsque  $|\Sigma| \geq 2$ .
2. On pose  $m = |\Sigma|^n$ . Montrer qu'il existe  $m$  chaînes non nécessairement disjointes  $C_1, \dots, C_m$  telles que leur réunion vérifie  $\cup_{i=1}^m C_i = \Sigma^{(n)}$ .
3. Montrer que le nombre maximum d'éléments dans une antichaîne de  $(\Sigma^{(n)}, \leq)$  est  $m$ .

(Indication pour (3) : Montrer que (2) implique que  $\Sigma^{(n)}$  peut être décomposé en moins de  $m$  chaînes.)

**Solution :**

1. La relation est *réflexive* car une suite est toujours sa propre sous-suite.

Soient deux suites  $x$  et  $y$  telles que  $x \leq y$  et  $y \leq x$ . Alors la longueur de  $x$  est plus courte que celle de  $y$  et vice versa. Donc  $x$  et  $y$  ont même longueur, disons  $t$ . Comme  $x \leq y$ , il existe des indices  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq t$  tels que  $x_j = y_{i_j}$  pour  $j = 1, \dots, t$ . Mais la seule possibilité est que  $i_j = j$ . Il s'ensuit que  $x_i = y_i$  pour tout  $i \leq t$  et  $x = y$ . Ainsi la relation est *antisymétrique*.

Soient trois suites  $x, y$  et  $z$  telles que  $x \leq y$  et  $y \leq z$  de longueur  $r, s$  et  $t$ . Soient des indices  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq s$  tels que  $x_i = y_{j_i}$  pour  $1 \leq i \leq r$  et des indices  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq t$  tels que  $y_j = z_{k_j}$  pour  $j = 1, \dots, s$ . Alors pour tout  $1 \leq i \leq r, x_i = y_{j_i} = z_{k_{j_i}}$  d'une part et d'autre part, comme les suites  $(j_i)$  et  $(k_j)$  sont croissantes, leur composée est encore croissante et vérifie  $1 \leq k_{j_1} < k_{j_2} < \dots < k_{j_r} \leq t$ . Ainsi la relation est *transitive*.

On en déduit que  $(\Sigma^{(n)}, \leq)$  est bien un poset.

Pour montrer que  $(\Sigma^{(n)}, \leq)$  n'est pas un treillis quand  $n \geq 2$ , il faut supposer que  $|\Sigma| \geq 2$ . Soient  $a$  et  $b$  dans  $\Sigma$  et  $x = (a, \dots, a), y = (b, \dots, b)$  ( $x$  et  $y$  sont de longueur  $n$ ). Alors il n'existe pas de majorant commun à  $x$  et  $y$  (un majorant devrait contenir  $n$  fois  $a$  et  $n$  fois  $b$ ) donc *a fortiori* pas de borne supérieure.

2. Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un élément de  $\Sigma^n$ . On considère la chaîne  $(), (x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_1, \dots, x_n)$ . Quand  $x$  parcourt les  $|\Sigma|^n$  suites possibles, la réunion des chaînes correspondantes recouvre tout  $\Sigma^{(n)}$  car toute suite de  $\Sigma^{(n)}$  est un préfixe d'une certaine suite de  $\Sigma^n$ . Il y a bien  $m$  chaînes comme attendu.
3. On tire de la question précédente une décomposition de  $\Sigma^{(n)}$  comptant au plus  $m$  chaînes. À cette fin, on énumère les chaînes construites en 2 (dans un ordre quelconque) et on élimine dans chaque chaîne successive les éléments qui seraient déjà apparus précédemment. Ce procédé fournit une décomposition en au plus  $m$  chaînes disjointes. D'après le théorème de Dilworth, on en déduit que la largeur ne peut pas dépasser  $m$ .

Cependant, l'ensemble  $\Sigma^n$  (de cardinal  $m$ ) forme une antichaîne : si l'une des suites est une sous-suite d'une autre, les deux doivent être égales car elles sont de longueur identique. La largeur est donc bien  $m$ .

**Problème 4 [20 points].** On définit cinq plans de l'espace vectoriel réel  $\mathbb{R}^3$  par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 5z = 0\}, \\ H_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}, \\ H_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 4z = 0\}, \\ H_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + 9z = 0\}, \\ H_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 5z = 0\}. \end{aligned}$$

Soit  $P = \{\cap_{i \in I} H_i \mid I \subseteq \{1, \dots, 5\}\}$ .

1. Montrer que  $\mathbb{P} = (P, \subseteq)$  est un treillis possédant un unique élément minimal  $\{0\}$  et un unique élément maximal  $\mathbb{R}^3$ .
2. Dessiner le diagramme de Hasse de  $\mathbb{P}$ .
3. Calculer  $\mu(\{0\}, x)$  pour tout  $x \in P$ .

**Solution :**

1. Il a été vu en cours que l'inclusion est un ordre partiel. Aussi  $\mathbb{P}$ , qui est un sous-poset de  $(\mathbb{R}^3, \subseteq)$ , est un poset. On observe que les éléments de  $\mathbb{P}$  sont tous des espaces vectoriels. Étant donné deux éléments  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{P}$ , l'infimum  $a \wedge b$  est donné par l'intersection  $c = a \cap b$  car  $c$  est le plus grand sous-espace contenu dans  $a$  et  $b$ . D'autre part, le supremum  $a \vee b$  est donné par  $d = \langle a, b \rangle$ , l'espace vectoriel engendré par  $a$  et  $b$  car  $d$  doit contenir  $a$  et  $b$  et  $d$  est minimal pour cette propriété. Remarquons  $d$  appartient bien dans tous les cas à  $\mathbb{P}$  (voir diagramme ci-dessous). Enfin,  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}^3$  sont respectivement minimal et maximal pour  $P$  et on sait qu'un treillis ne contient jamais plus d'un tel élément (Prop 4.14 du cours).
2.  $P$  est formé de  $\{0\}$ , de  $\mathbb{R}^3$ , des  $(H_i)_{1 \leq i \leq 5}$  et de droites obtenues par intersection des plans. On obtient exactement 6 droites :

–  $D_1 = H_1 \cap H_2 = H_1 \cap H_3 = H_2 \cap H_3$  dirigée par  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Noter que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

–  $D_2 = H_1 \cap H_4$  dirigée par  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

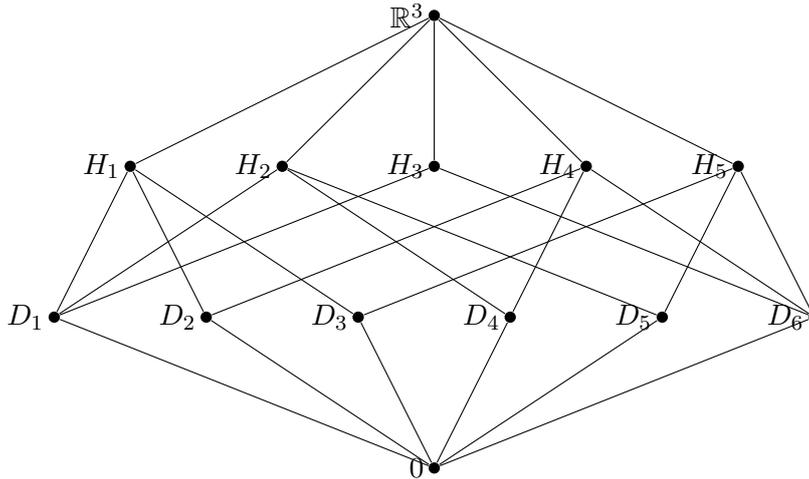
–  $D_3 = H_1 \cap H_5$  dirigée par  $\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

–  $D_4 = H_2 \cap H_4$  dirigée par  $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

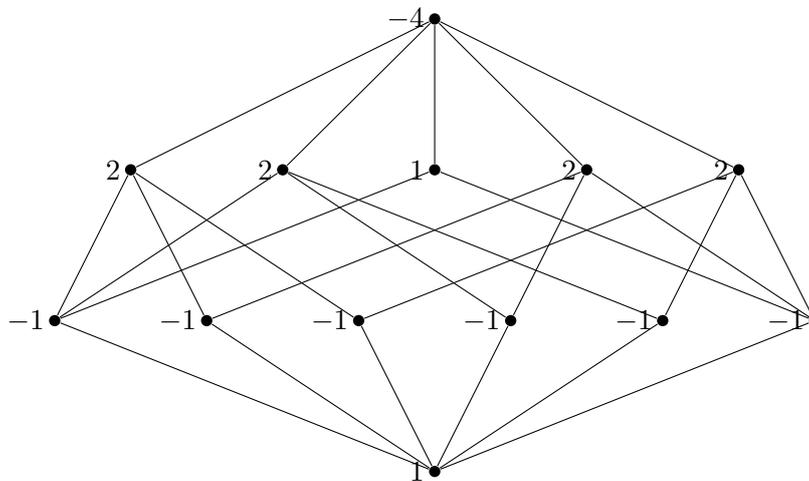
-  $D_5 = H_2 \cap H_5$  dirigée par  $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

-  $D_6 = H_3 \cap H_4 = H_3 \cap H_5 = H_4 \cap H_5$  dirigée par  $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On obtient le diagramme suivant :

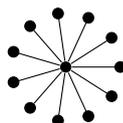


3. Valeur de la fonction de Moebius :



**Problème 5 [20 points].** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. On considère l'ensemble  $\mathcal{P}$  des partitions  $\pi = (V_i)_{1 \leq i \leq t}$  de  $V$  telles que le graphe restreint à chaque composante  $V_i$  de  $\pi$  est connexe. Si  $\pi = (V_i)_{1 \leq i \leq t}$  et  $\pi' = (V_{i'})_{1 \leq i' \leq t'}$  sont deux partitions de  $V$ , on dit que  $\pi$  est un raffinement de  $\pi'$  et on note  $\pi \preceq \pi'$  lorsque pour tout  $i \leq t$ , il existe un entier  $i' \leq t'$  tel que  $V_i \subseteq V_{i'}$ .

1. Montrer que  $(\mathcal{P}, \preceq)$  est un treillis.
2. On note  $E_n$  le graphe à  $n + 1$  sommets en étoile.



Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la largeur du poset induit par  $E_n$ .

3. On dispose d'un ensemble  $C$  de  $x$  couleurs pour colorier le graphe. Pour  $\pi = (V_i)_{1 \leq i \leq t} \in \mathcal{P}$ , on note  $f(\pi)$  le nombre d'applications  $V \rightarrow C$  constantes sur chaque composante  $V_i$  de  $\pi$  et  $g(\pi)$  le nombre d'applications  $V \rightarrow C$  constantes sur chaque composante de  $\pi$  qui associent, de plus, des couleurs distinctes à deux blocs reliés par une arête de  $G$ . Exprimer  $f$  en fonction de  $g$  puis  $g$  en fonction de  $f$ .
4. On note  $\pi_0$  la partition de  $V$  en singletons et  $\chi_G(x)$  le nombre de coloriages de  $G$  utilisant exactement  $x$  couleurs. Montrez que

$$\chi_G(x) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\pi \in \mathcal{P}, |\pi|=k} \mu(\pi_0, \pi) \right) x^k$$

où  $\mu$  représente la fonction de Möbius du treillis.

**Solution :**

1. Soit  $\pi = (V_i)_{1 \leq i \leq t}$  une partition de  $\mathcal{P}$ . La relation est *réflexive* car pour tout  $i \leq t$ ,  $V_i \subseteq V_i$ .

Soient  $\pi = (V_i)_{1 \leq i \leq t}$  et  $\pi' = (V_{i'})_{1 \leq i' \leq t'}$  deux partitions de  $\mathcal{P}$ . On suppose que  $\pi \preceq \pi'$  et  $\pi' \preceq \pi$ . Étant donné  $i \leq t$ , il existe  $i' \leq t'$  et  $i'' \leq t$  tels que  $V_i \subseteq V_{i'} \subseteq V_{i''}$ . Mais comme  $\pi$  est une partition,  $V_i = V_{i''}$  donc  $V_i = V_{i'}$ . Comme  $\pi'$  est une partition, il n'y a qu'un seul  $i'$  correspondant à  $i$  possible. Comme  $\pi$  couvre tout  $V$ , chaque indice  $i' \leq t'$  est atteint ainsi. Aussi (à l'ordre des indices près),  $\pi = \pi'$  et la relation est *antisymétrique*.

Soient  $\pi = (V_i)_{1 \leq i \leq t}$ ,  $\pi' = (V_{i'})_{1 \leq i' \leq t'}$  et  $\pi'' = (V_{i''})_{1 \leq i'' \leq t''}$  trois partitions de  $\mathcal{P}$  telles que  $\pi \preceq \pi'$  et  $\pi' \preceq \pi''$ . Alors pour  $i \leq t$ , il existe  $i' \leq t'$  puis  $i'' \leq t''$  tels que  $V_i \subseteq V_{i'} \subseteq V_{i''}$ , donc  $\pi \preceq \pi''$  et la relation est *transitive*.

Donc  $(\mathcal{P}, \preceq)$  est un poset.

Soient  $\pi = (V_i)_{1 \leq i \leq t}$  et  $\pi' = (V_{i'})_{1 \leq i' \leq t'}$  deux partitions de  $\mathcal{P}$ . On souhaite définir l'infimum et le supremum de  $\pi$  et  $\pi'$ . Pour l'infimum, on construit  $\pi_\wedge$  dont les parties sont formées des sommets des composantes connexes du graphe restreint aux intersections non-vides  $V_i \cap V_{i'}$  avec  $i \leq t$  et  $i' \leq t'$ . Soit  $\theta = (W_j)_{j \leq s} \in \mathcal{P}$  une partition plus petite que  $\pi$  et  $\pi'$ . Pour  $j \leq s$ , il existe  $i$  et  $i'$  tels que  $W_j \subseteq V_i$  et  $W_j \subseteq V_{i'}$ . De plus,  $W_j$  est connexe, donc contenu dans l'une des composantes connexes de  $V_i \cap V_{i'}$ . Ainsi  $\theta \preceq \pi_\wedge$  et  $\pi_\wedge$  est bien le plus grand des minorants.

Pour construire le supremum, on considère l'ensemble  $A = \{\theta \in \mathcal{P}; \pi \preceq \theta, \pi' \preceq \theta\}$  des majorants de  $\pi$  et  $\pi'$ . On observe que  $A$  est fini et que si  $\theta$  et  $\theta'$  appartiennent à  $A$ ,  $\theta \wedge \theta'$  est encore dans  $A$ . Mais alors  $A$  possède un élément minimal, à savoir  $\bigwedge_{\theta \in A} \theta$  qui est unique parce que deux éléments minimaux sont encore minorés par leur infimum dans  $A$ . On a bien défini  $\pi \vee \pi' = \bigwedge_{\theta \in A} \theta$ .

2. Pour partitionner le graphe  $E_n$  en composantes connexes, on peut relier le sommet central à certains des sommets périphériques (que l'on peut coder par un sous-ensemble de  $[n]$ ), les sommets restants demeurant isolés. Le treillis induit est donc isomorphe au treillis booléen  $\mathcal{B}_n$ . Le théorème de Sperner établit que sa largeur vaut  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ .
3. On a  $f(\pi) = \sum_{\pi \preceq \theta} g(\theta)$  car pour tout coloriage de  $\pi$  non valide, on peut trouver une unique partition plus grossière pour laquelle ce même coloriage devient valide. On en déduit par la formule d'inversion que

$$g(\pi) = \sum_{\pi \preceq \theta} \mu(\pi, \theta) f(\theta).$$

4. On a  $\chi_G(x) = g(\pi_0)$ . De plus, il est facile de voir que  $f(\pi) = x^{|\pi|}$ , d'où la formule attendue en regroupant les termes selon le nombre d'éléments dans chaque partition

$$\chi_G(x) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{\pi \in \mathcal{P}, |\pi|=k} \mu(\pi_0, \pi) \right) x^k.$$

**Problème 6 [20 points].** Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire de circonférence supérieure à 4 et dépourvu de ponts. Montrer que  $|E| \leq 2|V| - 4$ . (Indication : on emploiera la formule d'Euler à bon escient.)

**Solution 1 :** Soit  $n = |V|$  et  $e = |E|$ . Notons  $f_i$  le nombre de faces de  $G$  dont le bord compte  $i$  arêtes. Comme la circonférence de  $G$  est supérieure à 4, on a  $f_1 = \dots = f_3 = 0$ . Comme toute arête est contenue exactement dans deux faces (Prop. 5.34 du cours), on en déduit que  $\sum_{i \geq 4} i f_i = 2e$ . Cependant, la formule d'Euler dit que  $\sum_{i \geq 4} f_i - e + n = 2$ , si bien que  $\sum_{i \geq 4} f_i = 2 + e - n$ . D'où

$$0 \leq \sum_{i \geq 4} (i - 4) f_i = 2e - 4(2 + e - n) = -2e - 8 + 4n,$$

soit encore  $2e \leq 4n - 8$  et  $e \leq 2n - 4$ .

**Solution 2 :** On décompose  $G$  en composantes connexes  $G_i = (V_i, E_i)$  pour appliquer le théorème 5.35 du cours. Les composantes connexes sont soit des arbres, soit des graphes planaires connexes de circonférence supérieure à 4, ce dernier cas survenant forcément plus d'une fois. Dans le premier cas, on a  $|E_i| = |V_i| - 1 \leq |V_i|$ ; dans le second cas on a  $|E_i| \leq \frac{g}{g-2}(|V_i| - 2)$ . Mais l'application  $g \mapsto \frac{g}{g-2}$  est décroissante pour  $g \geq 4$ . Donc  $|E_i| \leq \frac{4}{4-2}(|V_i| - 2) = 2|V_i| - 4$ . En sommant sur l'ensemble des composantes connexes, on a bien la relation attendue.

**Problème 7 [20 points].** On rappelle qu'un *arbre* est un graphe connexe acyclique. On appelle *feuille* tout sommet de degré 1.

1. Montrer que tout arbre à plus de deux sommets possède au moins deux feuilles.
2. Soient  $G$  un graphe et  $v$  une feuille de  $G$ . Montrer que  $G$  est un arbre si et seulement si  $G' = G \setminus \{v\}$  est un arbre.
3. Montrer qu'un graphe  $G$  est un arbre si et seulement si quels que soient les sommets distincts  $v$  et  $w$  de  $G$  il existe exactement un chemin reliant  $v$  et  $w$ .
4. Soit  $G$  un graphe à plus de trois sommets. Montrer que  $G$  est un arbre si et seulement si  $G$  n'est pas le graphe complet et ajouter à  $G$  une arête quelconque crée un seul cycle.

**Solution :**

1. Soit  $c = v_0 - v_1 - \dots - v_k$  un chemin de longueur maximale. Clairement  $k \geq 1$  et donc en particulier  $v_0$  et  $v_k$  sont distincts. Prouvons que  $v_0$  et  $v_k$  sont des feuilles. Si ce n'est pas le cas pour  $v_0$ , il existe alors une seconde arête  $(v_0, v)$ . Mais alors  $v$  ne peut ni appartenir à la suite  $(v_i)_{i \geq 2}$  car cela créerait une boucle, ni au complémentaire du chemin  $c$  car ce chemin est maximal. On raisonne de même pour  $v_k$ .
2. Si  $G$  est un arbre,  $G'$  est encore acyclique. Par ailleurs, si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $G'$ , ils sont reliés par un chemin dans  $G$  qui ne peut passer par  $v$  car  $v$  est de degré 1. Donc  $x$  et  $y$  sont encore reliés dans  $G'$ . Réciproquement, si  $G'$  est connexe,  $G$  est trivialement connexe également. D'autre part, ajouter  $v$  ne peut pas créer de cycle car  $v$  est de degré 1.
3. Soit  $G$  un arbre. On raisonne par récurrence sur le nombre  $n$  de sommets pour montrer l'unicité des chemins entre deux sommets quelconques. Le cas  $n = 2$  est clair. Si  $G$  compte  $n + 1 \geq 3$  sommets, on retire une feuille de  $G$ , ce qui est possible d'après la première question. Par hypothèse de récurrence, il n'y a qu'un chemin dans  $G'$  entre deux sommets de  $G'$ , de plus aucun nouveau chemin ne pourrait passer par  $v$  à cause de son degré égal à 1. D'autre part, un chemin partant de  $v$  passe forcément par la seule arête issue de  $v$  puis ne peut se prolonger que d'une seule manière.  
Réciproquement, s'il existe un unique chemin entre deux sommets quelconques, le graphe est bien connexe. Il est aussi acyclique car tout cycle induirait deux chemins entre deux sommets quelconques du cycle (en suivant le cycle dans chacun des sens pour aller à l'autre sommet).
4. Si  $G$  est un arbre, alors  $G$  n'est clairement pas le graphe complet (il n'a pas de feuille). De plus en ajoutant l'arête disons  $(u, v)$ , comme il n'y a qu'un unique chemin de  $u$  à  $v$ , on ne crée qu'un cycle supplémentaire. Réciproquement un graphe complet n'est pas un arbre. D'autre part, si en rajoutant une arête  $(u, v)$ , on ne crée pas de cycle, c'est que le graphe n'est pas connexe car  $u$  et  $v$  ne sont pas initialement reliés. Si on crée plusieurs cycles, c'est qu'il existe plusieurs chemins entre  $u$  et  $v$  ce que la question précédente exclut. Dans tous les cas  $G$  n'est pas un arbre.

**Problème 8 [20 points].** Tétris

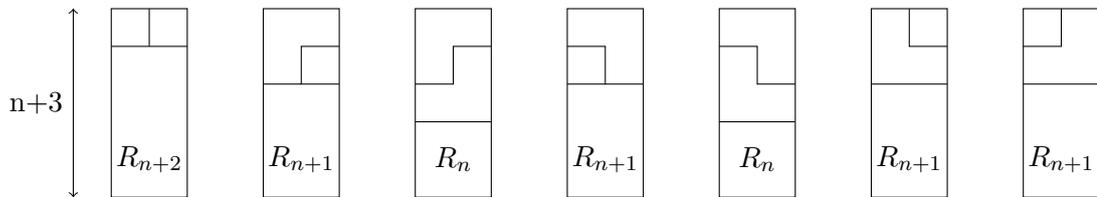
On considère un rectangle de taille  $n \times 2$ . On note  $R_n$  le nombre de pavages du rectangle par les pièces dessinées ci-dessous et orientées dans n'importe quel sens. Par convention,  $R_0 = 1$ .



1. Montrez que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_{n+3} = R_{n+2} + 4R_{n+1} + 2R_n$  et que  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 5$  et  $R_3 = 11$ .
2. Exprimer la série génératrice  $S(x)$  de la suite  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sous forme d'une fraction rationnelle.
3. Donner une forme close de  $R_n$  et un équivalent asymptotique de  $R_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Solution :**

1. Soit la dernière bande du rectangle ne contient que que des petits carrés, soit elle contient une équerre. On a donc les possibilités suivantes.



ce qui justifie la formule.

2. On a  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 5$  et  $R_3 = 7$  ( $R_0 = 1$  pour compléter la formule). Par ailleurs

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_{n+3}x^{n+3} - x \sum_{n=0}^{\infty} R_{n+2}x^{n+2} - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} R_{n+1}x^{n+1} - 2x^3 \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n = 0$$

soit en notant  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n$ ,

$$(S(x) - 1 - x - 5x^2) - x(S(x) - 1 - x) - 4x^2(S(x) - 1) - 2x^3 S(x) = 0$$

$$S(x) = \frac{1}{1 - x - 4x^2 - 2x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-2x-2x^2)} = \frac{1}{-2(1+x)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})}$$

3. Comme  $\frac{2}{1-\sqrt{3}} = -1 - \sqrt{3}$  et  $\frac{2}{1+\sqrt{3}} = -1 + \sqrt{3}$ , on a besoin de trouver une décomposition de la forme

$$S(x) = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1 - (1 + \sqrt{3})x} + \frac{\gamma}{1 - (1 - \sqrt{3})x}$$

Pour trouver  $\alpha$ , on substitue  $x = -1$  dans

$$(1+x)S(x) = \frac{1}{1-2x-2x^2} = \alpha + \frac{\beta}{1 - (1 + \sqrt{3})x}(1+x) + \frac{\gamma}{1 - (1 - \sqrt{3})x}(1+x)$$

ce qui donne directement  $\alpha = 1$ . Alors

$$S(x) - \frac{1}{1+x} = \frac{2x}{1-2x-2x^2} = \frac{\beta}{1 - (1 + \sqrt{3})x} + \frac{\gamma}{1 - (1 - \sqrt{3})x} = \frac{(\beta + \gamma + (-\beta + \gamma)\sqrt{3})x - (\beta + \gamma)}{1 - 2x - 2x^2}$$

On en tire aussitôt par identification que  $\beta = -\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Il vient alors

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \sqrt{3})^n - \frac{\sqrt{3}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \sqrt{3})^n$$

On a ainsi

$$R_n = (-1)^n + \frac{\sqrt{3}}{3} (1 + \sqrt{3})^n - \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \sqrt{3})^n$$

De plus asymptotiquement, comme  $|1 - \sqrt{3}| < 1$  et  $1 + \sqrt{3} > 1$ ,

$$R_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{3} (1 + \sqrt{3})^n.$$