ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Algorithmique

2 Novembre 2009

- Le seul document autorisé est une feuille $A4$ recto-verso.
- Les calculatrices, téléphones, ordinateurs etc... sont interdits.

Nom :

Prénom :

Section :

Exercice 1 / 10 points	Exercice 2 / 20 points	Exercice 3 / 15 points	Exercice 4 / 20 points	Exercice 5 / 15 points	Exercice 6 / 20 points

Total / 100

Problème 1 [10 points]. Donner une spécification formelle du problème suivant : décider si la somme des éléments d'un ensemble fini et non vide de nombres naturels est pair.

1. Quel est l'ensemble des entrées ?
2. Quel est l'ensemble des sorties ?
3. Quelle est la dépendance relationnelle ?

Problème 2 [20 points].

Répondre aux questions suivantes. Pas besoin de justifier.

1. Donner un élément de $\text{Pot}(\{a, b, c\}) \times \{a, b\}$.

2. Donner une relation symétrique sur $\{a, b, c\}$.

3. Donner un sous-ensemble de $\text{Pot}(\{1, 2, 3\})$.

4. Soit S un ensemble avec $|S| = n$. Que vaut $|\text{Pot}(S)|$?

5. $n = \theta\big(\log_2(3^n)\big)$. Vrai ou Faux?

6. $\sqrt{n} = O\big((\log_2 n)^2\big)$. Vrai ou Faux?

7. $2^{(\ln^2 n)} = O\big(n^2\big)$. Vrai ou Faux?

8. Soit $p(n)$ un ploynôme de degré 4. Classer les fonctions suivantes de telle façon que f soit avant g si $f(n) = o\big(g(n)\big)$:

$$\big(\frac{1}{2}\big)^n, e^{2\pi n}, p(n)^2, n^5, 1.61803, \ln^6(n)$$

9. Donner une fonction $g(n)$ avec $g(n) \neq n^2 + n + 1$, et $g(n) = \theta(n^2 + n + 1)$.

10. Dessiner un arbre binaire dans lequel tous les sommets ont degré 0 ou 2, mais qui n'est pas un arbre AVL.

11. Supposons qu'on a un arbre binaire de recherche T de hauteur h, et qu'on efface un élément (avec l'algorithme du cours) pour obtenir un nouvel arbre binaire de recherche T'. Quelles sont les valeurs possibles pour la hauteur h' de T'?

12. Soit T un arbre avec n sommets. Combien T a-t-il d'arêtes?

13. Soit T un arbre binaire avec n sommets. Quel est la plus petite hauteur que peut avoir T? Quel est la plus grande hauteur que peut avoir T?

14. Combien faut-il de mémoire pour représenter un graphe orienté à n sommets par sa matrice d'adjacence?

15. Soit G un graphe non-orienté avec n sommets représenté par des listes d'adjacence. Si la première liste contient $n - 1$ éléments alors G est connexe. Vrai ou Faux?

16. Soit T un arbre binaire de recherche avec n sommets. Pour faire une recherche dans T, combien faut-il de comparaisons dans le pire des cas (en notation θ)? En moyenne, quel est l'ordre du nombre de comparaisons nécessaires (en notation θ)?

17. Soit T un arbre AVL avec n sommets. Pour faire une recherche dans T, quel est l'ordre du nombre de comparaisons nécessaires dans le pire des cas (en notation θ)?

18. Quel est l'ordre du nombre d'opérations nécessaires pour multiplier deux matrices $n \times n$ avec l'algorithme naïf (en notation θ)?

19. L'algorithme de Strassen permet de multiplier deux matrices $n \times n$ en utilisant $O(n^2)$ opérations. Vrai ou Faux?

20. Soit un tableau de hachage contenant n lments. Quel est le temps pour la recherche d'un lment dans le pire des cas (en notation θ)?

Problème 3 [15 points]. Soit $A(n) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

1. Calculer $A(n)$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
2. Comparer la suite $A(n)$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$ avec la suite $n!$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
3. Deviner une formule générale pour $A(n)$ et prouver cette formule par induction

Problème 4 [20 points].

1. Pour $m \geq 0$, on definit récursivement la matrice $T_m \in \mathbb{R}^{2^m \times 2^m}$ par

$$T_0 = 1$$

$$T_m = \begin{bmatrix} T_{m-1} & T_{m-1} \\ T_{m-1} & -T_{m-1} \end{bmatrix}.$$

   Nous voulons calculer le produit xT_m pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^{2^m}$.

   (a) Quelle est la valeur de T_m pour $m = 3$ et $m = 4$?

   (b) On suppose qu'on peut diviser x en deux parties $x = [x_1 \quad x_2]$, où x_1 contient la première moitié de x et x_2 contient la deuxième moitié de x. De plus, on suppose qu'on connaît la valeur des produits $y_1 = x_1 T_{m-1}$ et $y_2 = x_2 T_{m-1}$. Comment pouvons-nous combiner y_1 et y_2 pour calculer xT_m?

   (c) Donner un algorithme diviser-pour-régner pour calculer le produit xT_m, où $x \in \mathbb{R}^{2^m}$, qui a un temps de parcours $O(m2^m)$.

Problème 5 [15 points]. Quel temps de calcul faut-il compter asymptotiquement pour chacun des algorithmes suivants ?

1. L'algorithme A divise le problème en 5 sous-problèmes de taille moitié et combine leur solution en un temps linéaire.
2. L'algorithme B résout par récurrence un problème de taille n en résolvant deux sous-problèmes de taille $n-1$ puis en combinant leur solution en un temps constant.
3. L'algorithme C divise le problème de taille n en 9 sous-problèmes de taille $n/3$ chacun, puis combine les solutions en un temps quadratique en n.

Problème 6 [20 points]. Étant donné une suite strictement croissante $(a_1, \ldots, a_n)$ de n entiers, concevez un algorithme de type diviser-pour-régner qui détermine s'il existe un indice i tel que $a_i = i$ et qui s'exécute en un temps $O(\log n)$.