ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Examen partiel 5.11.2009

Mathématiques discrètes

5.11.2009

– Utilisez une feuille différente pour chaque problème.
– Ecrivez votre nom et le numéro du problème traité en haut de chaque feuille.
– L'usage de matériel électronique est prohibé durant cette épreuve.
– Vous avez exactement trois heures. Bonne chance.

Nom :

Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4	Problème 5	Problème 6

Total

Notations utilisées pour l'examen

1. Pour tout ensemble X, $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ désigne l'hypercube $\{0, 1\}^n$.

Problème 1 [6 points]. Soient les ensembles suivants : $A = \{\emptyset\}$, $B = \{A\}$, $C = \{\emptyset, A\}$, $D = \{\emptyset, A, C\}$ et $S = \{\emptyset, A, B, C, D\}$. Enumérez les éléments des ensembles suivants (en justifiant votre réponse).

1. $Q_1 = \{x; x \in S \text{ et } x \subseteq D\}$
2. $Q_2 = \{x; x \in S \text{ et } x \in D\}$.

Solution :

1. $Q_1 = S$.
   En effet,
   – $\emptyset$ est toujours un sous-ensemble d'un ensemble,
   – $A \subseteq D$ parce que son unique élément, à savoir $\emptyset$, est un élément de D,
   – $B \subseteq D$ parce que $A \in D$
   – $C \subseteq D$ parce que $\emptyset$ et A appartiennent à D.
   – $D \subseteq D$, ce qui est vrai pour n'importe quel ensemble.
2. $Q_2 = D$.
   On a $Q_2 = S \cap D$. Mais comme $D \subseteq S$, $Q_2 = D$.

Problème 2 [15 points]. Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que l'opérateur XOR est défini par $\mathrm{XOR}(x, y) = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$.

1. Exprimez $\mathrm{XOR}(x, \mathrm{XOR}(y, z))$ sous forme normale conjonctive, forme normale disjonctive et sous forme polynomiale.
2. Combien de fonctions booléennes sur $\mathcal{H}_n$ peut-on exprimer à l'aide de l'opérateur XOR, de la constante 1 et des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$?
3. Est-il possible d'exprimer toute fonction booléenne sur $\mathcal{H}_n$ en utilisant XOR, 1 et les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uniquement ?

Solution :

1. La table de valeur de $f(x, y, z) = \mathrm{XOR}(x, \mathrm{XOR}(y, z))$ est

x	y	z	$\mathrm{XOR}(x, \mathrm{XOR}(y, z))$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

   En isolant les ensembles $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(0)$, on obtient la CNF et la DNF suivantes :

$$f = (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

$$f = (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$

   Par ailleurs, il a été vu en cours que la représentation polynomiale de $\mathrm{XOR}(x, y)$ est $x \oplus y$ et que cette loi est associative. Donc $f(x, y, z)$ admet pour représentation polynomiale $x \oplus y \oplus z$.

2. Notons d'abord que la constante 0 peut-être représentée par $1 \oplus 1$.
   Comme la loi XOR est associative et commutative, la représentation polynomiale de toute fonction écrite à l'aide de 1, $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et XOR est une fonction affine sur $\mathcal{H}_n$, c'est-à-dire un polynôme de degré 0 ou 1, de la forme

$$f(x_1, \ldots x_n) = \epsilon_1 x_1 \oplus \cdots \oplus \epsilon_n x_n \oplus c$$

   avec $(\epsilon_i) \subseteq \{0, 1\}$ et $c \in \{0, 1\}$. Il y a en tout 2^{n+1} fonctions affines (2 possibilité selon que 1 est présent ou non et deux possibilités selon que x_i est présent ou non).

3. L'espace $\mathcal{H}_n$ compte 2^n éléments. Il y a donc $2^{|\mathcal{H}_n|} = 2^{2^n}$ fonctions booléennes sur cet espace. Lorsque $n = 1$, $2^{1+1} = 2^{2^1}$ et toute fonction booléenne est affine. Par contre si $n \geq 2$, ces deux espaces sont distincts car ils ont des cardinaux distincts.

Problème 3 [10 points]. Une relation ρ sur un ensemble S est dite *circulaire* si pour tous $x, y, z \in S$, $x \sim_\rho y$ et $y \sim_\rho z$ impliquent $z \sim_\rho x$. Montrez qu'une relation circulaire réflexive est une relation d'équivalence. Une relation circulaire est-elle forcément une relation d'équivalence ?

Solution : La réflexivité est vérifiée par hypothèse. Pour la symétrie, on note que si $x \sim_\rho y$, comme $y \sim_\rho y$, par circularité, $y \sim_\rho x$. Pour la transitivité, si $x \sim_\rho y$ et $y \sim_\rho z$, alors par circularité, $z \sim_\rho x$, mais par symétrie, $x \sim_\rho z$.

Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ et la relation $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. Cette relation n'est pas réflexive. Donc R n'est pas une relation d'équivalence.

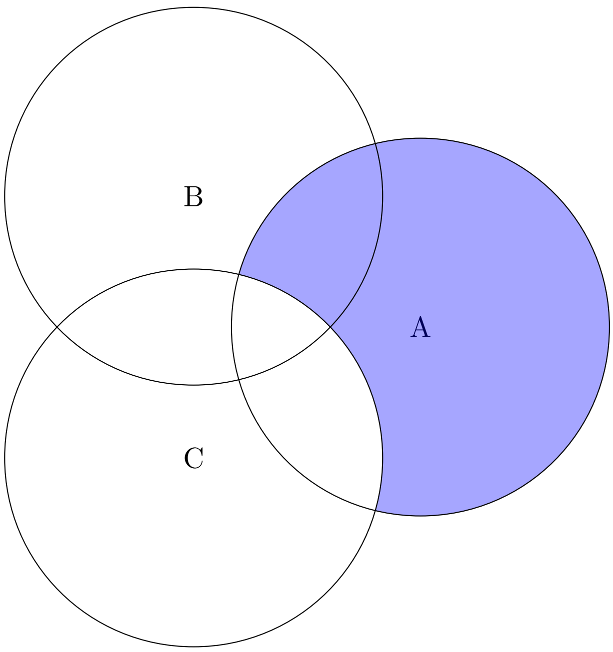
Autre contre-exemple. Soit (E, R) une relation d'équivalence. Alors R est en particulier circulaire. Soit x un élément qui n'appartient pas à E, alors $(E \cup \{x\}, R)$ est encore une relation circulaire, qui n'est plus une relation d'équivalence.

Problème 4 [10 points]. On considère l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On définit une relation ϕ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad A \sim_\phi B \text{ si } (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ est dénombrable.}$$

Montrez que ϕ est une relation d'équivalence.

Solution : Réflexivité : Lorsque $A = B$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est l'ensemble vide, qui est dénombrable.
Symétrie : L'expression $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est symétrique en A et B, donc la relation ϕ est symétrique.
Transitivité : Si $A \sim_\phi B$, $B \sim_\phi C$, alors $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C \setminus B$ et $B \setminus C$ sont tous dénombrables (en tant que sous-ensembles d'ensembles dénombrables). On remarque que $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. En effet, soit $x \in A \setminus C$. Deux cas sont possibles : si $x \in B$, alors $x \in B \setminus C$, si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B$. On en déduit que $A \setminus C$ est dénombrable, car l'union de deux ensembles dénombrables est dénombrable. Il en va de même pour $C \setminus A$. D'où $A \sim_\phi C$.



Problème 5 [10 points]. Soit $(X, \leq)$ un poset et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Pour $A, B \in \mathcal{P}(X)$, on note $A \ll B$ la relation

$$A \ll B \quad \text{si} \quad \forall a \in A, \exists b \in B, \qquad a \leq b.$$

Montrez que quand $A \ll B$ et $B \ll A$, A et B possèdent le même ensemble d'éléments maximaux.

Solution : Soit a un élément maximal de A, montrons que a appartient à B et que a est un élément maximal de B.

Par hypothèse, comme $A \ll B$, il existe $b \in B$ tel que $a \leq b$. De plus comme $B \ll A$, il existe $\alpha \in A$ tel que $b \leq \alpha$. Ainsi par transitivité $a \leq b \leq \alpha$. Mais a est un élément maximal, donc $a = \alpha$. Par antisymétrie, on conclut que $a = b$. Donc a appartient bien à B. Mais alors on vient de voir que tout majorant dans B de a est égal à a lui-même. Donc a est bien maximal dans B.

Le problème étant symétrique en A et B, on montre de même que les éléments maximaux de B sont inclus dans l'ensemble des éléments maximaux de A, ce qui conclut l'exercice.

Problème 6 [15 points]. Soit S un ensemble. Une partition de S est une décomposition de S en sous-ensembles disjoints non-vides. On note $\mathcal{P}_\sqcup(S)$ l'ensemble des partitions de S. Soient $\Sigma = (\Sigma_t)_{t\in T}$ et $\Sigma' = (\Sigma'_t)_{t\in T'}$ deux partitions de S. On dit que Σ' est un raffinement de Σ, et on note $\Sigma' \preccurlyeq \Sigma$, si pour tout $t' \in T'$, il existe $t \in T$ tel que $\Sigma'_{t'} \subseteq \Sigma_t$. Montrer que $(\mathcal{P}_\sqcup(S), \preccurlyeq)$ est un treillis.

[Indications :

- On pourra montrer que l'« intersection » de deux partitions (dans un sens à préciser) est une partition.
- On pourra étudier les chaînes du poset $E = \{\Pi \in \mathcal{P}_\sqcup(S);\ \Sigma \preccurlyeq \Pi \text{ et } \Sigma' \preccurlyeq \Pi\}$.]

Solution :

On vérifie d'abord que $\preccurlyeq$ est un ordre :

Réflexivité : Soit $\Sigma = (\Sigma_t)_{t\in T}$ une partition, comme pour tout $t \in T$, $\Sigma_t \subseteq \Sigma_t$, on a bien $\Sigma \preccurlyeq \Sigma$.

Antisymétrie : Supposons que pour deux partitions Σ et Σ' on ait $\Sigma \preccurlyeq \Sigma'$ et $\Sigma' \preccurlyeq \Sigma$. Soit $t \in T$. Alors il existe $t' \in T'$, tel que $\Sigma_t \subseteq \Sigma'_{t'}$. Mais alors il existe $t'' \in T$ tel que $\Sigma'_{t'} \subseteq \Sigma_{t''}$. Or Σ est une partition, donc $\Sigma_t = \Sigma_{t''}$ et $t = t''$. Donc pour tout t, il existe un t' tel que $\Sigma'_{t'} = \Sigma_t$. Cet élément t' est unique, car Σ' est une partition. On peut donc identifier T à une sous-partie U' de T'. Mais comme Σ est une partition, l'ensemble des $(\Sigma_{t'})_{t'\in U'}$ recouvre S et forme la partition Σ' toute entière. Ainsi, quitte à identifier T à T', les partitions Σ et Σ' sont égales.

Transitivité : Si $\Sigma \preccurlyeq \Sigma'$ et $\Sigma' \preccurlyeq \Sigma''$, pour tout $t \in T$, il existe $t' \in T'$ tel que $\Sigma_t \subseteq \Sigma'_t$. Mais il existe aussi $t'' \in T''$ tel que $\Sigma'_{t'} \subseteq \Sigma''_{t''}$. Ainsi, $\Sigma \preccurlyeq \Sigma''$.

Borne inférieure : Si Σ et Σ' sont deux partitions, on définit $\Sigma \wedge \Sigma'$ par $\Xi = (\Xi_{t,t'})_{t\in T, t'\in T'}$ où

$$\forall (t,t') \in T \times T', \qquad \Xi_{t,t'} = \Sigma_t \cap \Sigma_{t'}$$

Il est clair que Ξ est un raffinement de Σ et de Σ'. Supposons qu'il existe $\Xi' = (\Xi'_x)_{x\in X'}$ tel que $\Xi' \preccurlyeq \Sigma$ et $\Xi' \preccurlyeq \Sigma'$. Alors pour tout $x \in X'$, il existe $t \in T$ et $t' \in T'$ tels que $\Xi'_x \subset \Sigma_t$ et $\Xi'_x \subset \Sigma_{t'}$ ce qui montre que $\Xi'_x \subset \Xi_{t,t'}$. Donc $\Xi' \preccurlyeq \Xi$.

Définir la borne supérieure est un peu plus délicat. On considère le poset $R = \{\Pi \in \mathcal{P}(S);\ \Sigma \preccurlyeq \Pi,\ \Sigma \preccurlyeq \Pi\}$ ordonné par $\preccurlyeq$. Si C est une chaîne de ce poset, C est minorée par l'intersection des éléments de la chaîne, *i.e.* la partition Ξ formée des ensembles $\bigcap_{\Pi\in C, t\in T_\Pi} \Pi_t$. On peut lui appliquer le lemme de Zorn, ce qui montre l'existence d'une plus petite partition Ξ plus grossière que Σ et que Σ'. Cette partition est unique. Supposons que Π^1 et Π^2 soient deux éléments minimaux distincts de ce poset. Mais alors, leur intersection fournit encore un majorant plus petit que Π^1 et Π^2 ce qui est exclu. Ainsi Ξ est bien unique et on pose $\Xi = \Sigma \vee \Sigma'$. Cette partition est par construction, le plus petit majorant, c'est-à-dire la borne supérieure de Σ et Σ'.