On rappelle que l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'énonce ainsi : pour tous vecteurs réels $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$, on a $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$.

Exercice 5.1. Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\overline{G} = (V, E^c)$ où le complémentaire de E est pris dans $V \times V$. Montrer que si un graphe n'est pas connexe alors son complémentaire est connexe.

Exercice 5.2. Soit G un graphe sur n sommets tel que chaque sommet soit de degré au moins $\lceil (n-1)/2 \rceil$. Montrer que G est connexe.

Exercice 5.3. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Exercice 5.4. Soit $d \geq 3$, montrer que la taille du plus petit cycle contenu dans un graphe d-régulier sur n sommets ne peut dépasser $c \log_{d-1}(n)$ pour une certaine constante c.

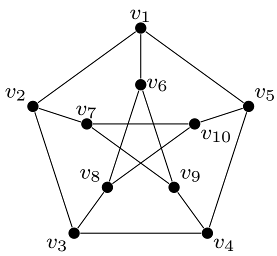
Exercice 5.5. Soit G un graphe avec n sommets et m arêtes tel que $m > n^2/4$. Montrer que G contient un triangle (un cycle de longueur 3). (Indication : montrer que si (u, v) est une arete, alors $\deg u + \deg v \leq n$ et sommer cette relation.)

Exercice 5.6. (Problème de Littlewood-Offord) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels avec $|a_i| > 1$ pour tout i. Soit

$$e(a_1, \ldots, a_n) := \# \left\{ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \mid -1 < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i < 1 \right\}.$$

Montrer que $e(a_1, \ldots, a_n) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Donner un exemple pour lequel il y a égalité.

Exercice 5.7. Montrer que le graphe de Petersen dessiné ci-dessous est isomorphe au graphe $G = (V, E)$ avec $V = \{A \subset \underline{5}, |A| = 2\}$ et $E = \{(A, B) \in V^2, A \cap B = \emptyset\}$.



Exercice 5.8. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe dans lequel tous les couples de sommets distincts ont soit zéro soit cinq voisins communs. Montrer que G est un graphe régulier, c'est-à-dire que tout les sommets de G sont de même degré. (Indice : choisir $(a, b) \in E$ et considérer l'ensemble A des voisins de a différents de b et l'ensemble B des voisins de b différents de a).

Exercice 5.9. Soit $G = (V, E)$ un graphe, le *graphe des arêtes* de G est le graphe $L(G) = (E, \{((a, b), (b, c)) \mid (a, b) \in E$ et $(b, c) \in E\}$.

1. Si la somme des degré de G est s, quel est le nombre de sommets de $L(G)$?
2. Supposons $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\deg(v_i) = d_i$, Exprimer la somme des degrés de $L(G)$.
3. Pour quels graphes connexes G est-il isomorphe à $L(G)$? Justifier sa réponse.

Exercice 5.10. Le Roi Uxamhwiashurh a quatre fils ; dix de ses descendants de sexe masculin ont trois fils chacun, quinze ont deux fils et tous les autres sont morts sans avoir eu d'enfant. Combien de descendants de sexe masculin le Roi Uxamhwiashurh a-t-il ?

Correction.

Exercice 5.1. Supposons G non connexe et montrons que son complémentaire l'est en montrant que $\forall v_1, v_2 \in V$ il existe un chemin dans E^c allant de v_1 à v_2.
- Si v_1 et v_2 ne sont pas dans la même composante connexe, alors en particulier $(v_1, v_2) \notin E$, donc $(v_1, v_2) \in E^c$: ainsi v_1 et v_2 sont même voisins dans le graphe complémentaire. dans $\overline{G}$.
- Si v_1 et v_2 appartiennent à la même composante connexe, comme G n'est pas connexe il existe un sommet v_3 de G qui n'est pas dans la même composante connexe que v_1 et v_2. On en déduit alors que (v_1, v_3) et (v_3, v_2) sont des arêtes de $\overline{G}$ qui forment un chemin de v_1 à v_2.

Exercice 5.2. Par l'absurde, si G n'est pas connexe, il existe une composante connexe de taille au plus $\lfloor n/2 \rfloor$. Un sommet de cette composante est donc de degré au plus $\lfloor n/2 \rfloor$-1, c'est-à-dire $< \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ d'où le résultat.

Exercice 5.3. Il suffit de montrer l'équivalence dans le cas où G est connexe. Le cas général s'ensuit facilement, puisque un graphe est biparti ssi ses composantes connexes le sont et que les cycles d'un graphe demeurent dans l'une de ses composantes connexes. Nous supposons donc G connexe. Montrons les deux assertions suivantes
- S'il existe un cycle impair, alors G est non biparti.
  Pour un tel cycle $v_1 - \cdots - v_{2p+1} - v_1$, on peut montrer par récurrence en partant de v_1 que tous les v_i pour i impair sont du même côté dans le graphe biparti ce qui est une contradiction car v_{2p+1} et v_1 sont voisins.
- S'il n'existe aucun cycle impair, alors $G = (V, E)$ est biparti :
  Prenons un sommet v_0 de G et notons A l'ensemble des sommets à distance paire de v_0, c'est-à-dire que la taille du plus court chemin entre v_0 et les éléments de A est paire. On pose alors $B = V - A$. Le graphe G est alors biparti pour cette décomposition ss'il n'y a aucune arête entre deux sommets de A ou deux sommets de B. Supposons qu'il existe une arête (a, a') dans A, alors par hypothèse, il existe un chemin c de longueur paire de v_0 à a et un chemin c' de longueur paire de a' à v_0. Mais alors, le chemin $c - (a, a') - c'$ serait un cycle de longueur impaire ce qui est exclu. On exclut de même toute arête dans B.

Exercice 5.4. Soit v_0 un sommet de G, regardons l'ensemble A de ses voisins à distance inférieure à i. S'ils sont tous différents, on a clairement $|A| = 1+d+d(d-1)+\cdots+d(d-1)^{i-1}$. Par contre si $1+d+\cdots+d(d-1)^{i-1} \geq n$, au moins deux éléments de A sont égaux et il existe par conséquent un cycle de taille au plus $2i$. En effet, il existe alors un sommet w du graphe que l'on peut atteindre à partir de v_0 par deux chemins distincts de longueur i, mais alors quitte à partir du dernier sommet v commun aux deux chemins, on peut construire le cycle $v - w - v$ en utilisant d'abord le premier puis le second chemin.

Soit l le plus petit entier tel que $(d-1)^l \geq n$. Comme $1 + d + \cdots + d(d-1)^{i-1} \geq (d-1)^i$, la taille du plus petit cycle de G est inférieure ou égale à $2l$. On en déduit que la taille du plus petit cycle est inférieure à $2\lceil \log_{d-1}(n) \rceil$.

Exercice 5.5. On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que si $G = (V, E)$ n'a pas de triangle, il ne peut avoir trop d'arêtes. L'idée est de remarquer que pour deux sommets adjacents u et v, s'il n'y a pas de triangle, $\deg(u) + \deg(v) \leq n$. En sommant cette relation sur toutes les arêtes, on obtient

$$\sum_{(u,v)\in E} \deg(u) + \deg(v) = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)^2 \leq nm = 2n \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)$$

avec m le nombre d'arêtes. En effet, en sommant sur les arêtes, un sommet v_i de G apparaît autant de fois que son degré. Comme sa contribution est de $\deg(v_i)$ par arêtes, on obtient le $\deg(v_i)^2$. On sait aussi que $2m = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (prendre $x_i = \deg(v_i)$ et $y_i = 1$) pour minorer la somme des carrés, on obtient $(2m)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \left(\deg(v_i)\right)^2$ et on en déduit que $(2m)^2/n \leq nm$. Ou encore que $m \leq n^2/4$.

Exercice 5.6. Comme on s'interesse uniquement au cardinal de l'ensemble, on peut supposer sans perte de généralité que tous les a_i sont positifs. En ordonnant les éléments de l'ensemble $\{-1, 1\}^n$ par $\varepsilon \leq \mu$ ssi $\varepsilon_i \leq \mu_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on se rend compte que l'ensemble que l'on cherche forme une antichaîne. En effet pour $\varepsilon < \mu$, en notant D l'ensemble des positions ou ils diffèrent, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i + 2 \sum_{i\in D} a_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i \ .$$

Donc si D est non vide, la différence entre ces deux sommes est de valeur absolue strictement plus grande que 2 (car $|a_i| > 1$ pour tout i). C'est-à-dire que ε et μ ne peuvent tous deux appartenir à l'ensemble recherché.

Il faut ensuite remarquer que notre poset sur $\{-1, 1\}^n$ est en fait identique à B_n. Une application directe du théorème de Dilworth vu en cours nous donne alors directement l'inégalité car il nous montre qu'une antichaîne d'un tel poset est de cardinal $\leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Un cas d'égalité est obtenue pour n pair et tous les a_i de même valeur absolue. En effet, dans ce cas l'ensemble solution est clairement en bijection avec les parties à $n/2$ éléments de $\underline{n}$.

Exercice 5.7. Un exemple de bijection f entre les sommets des deux graphes qui respecte les règles d'adjacence est la suivante : $f(v_1) = \{1, 2\}, f(v_2) = \{3, 4\}, f(v_3) = \{2, 5\}, f(v_4) = \{1, 4\} f(v_5) = \{3, 5\}, f(v_6) = \{4, 5\}, f(v_7) = \{1, 5\}, f(v_8) = \{1, 3\}, f(v_9) = \{2, 3\}, f(v_{10}) = \{2, 4\}$.

Exercice 5.8. L'idée est de compter l'ensemble C des arêtes (u, v) avec $u \in A$, $v \in B$ de deux manières. Pour tout $u \in A$, u et b ont comme voisin commun a, ils en ont donc exactement 4 autres par hypothèse. De plus, ces voisins sont nécessairement dans B, donc $|C| = 4|A|$. De même, en raisonnant sur les éléments v de B on trouve $|C| = 4|B|$. On en déduit $|A| = |B|$ et donc que tous les sommets adjacents sont nécessairement de même degré. Comme G est connexe, tous ses sommets sont de même degré et G est régulier.

Exercice 5.9.

1. Le nombre de sommets de $L(G)$ est exactement le nombre d'arêtes de G. Or $2|E| = s$, on en déduit que le nombre de sommets de $L(G)$ est $s/2$.
2. Pour v_i un des n sommets de G, notons d_i son degré. Il est facile de voir qu'un tel sommet induit $\binom{d_i}{2} = \frac{d_i(d_i-1)}{2}$ arêtes dans $L(G)$, il s'agit des arêtes de L(G) qui relient les arêtes adjacentes à v_i dans G. De plus, pour 2 sommets différents de G, ces arêtes induites sont différentes. On en déduit que le nombre d'arêtes m de $L(G)$ vérifie
$$2m = \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1) \; .$$
La somme des degrés de $L(G)$ étant égale à 2 fois son nombre d'arêtes, on a fini.
3. Une condition nécessaire pour que deux graphes soient isomorphes est qu'ils aient le même nombre de sommets et la même somme des degrés, on obtient donc
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n = \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1) \; .$$
Ou encore
$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 2n + \sum_{i=1}^{n} d_i = 4n \; .$$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz (prendre $x_i = d_i$ et $y_i = 1$), on sait que
$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} d_i)^2/n = 4n$$
De plus le cas d'égalité est atteint ssi tous le vecteur $(d_i)_{i \leq n}$ est proportionnel au vecteur (1), c'est-à-dire si tous les d_i sont égaux. De plus, pour que l'égalité $\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1)$ soit vérifiée, la valeur des d_i doit etre 2. Finalement une condition nécessaire pour que G soit isomorphe à $L(G)$ est que tous ses sommets soient de degré 2. Pour G connexe, on en déduit qu'une condition nécessaire est qu'il soit un cycle. Réciproquement, un cycle est trivialement isomorphe à son graphe des arêtes, d'où le résultat.

Exercice 5.10. Il fallait penser à l'arbre généalogique des descendants mâles du roi et compter les arêtes de cet arbre. Le roi a 4 fils ce qui nous donne 4 arêtes, de même tous ses descendants qui ont n fils contribuent à n arêtes de l'arbre. Le nombre d'arêtes de l'arbre est donc $4 + 10 * 3 + 15 * 2 = 64$. Comme il s'agit d'un arbre, on en déduit qu'il a 65 sommets, et en enlevant le roi on trouve 64 descendants de sexe masculin.