Exercice 6.1. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a pas d'autres polyèdres réguliers convexes que les 5 solides de Platon (tétraèdre, cube, octaèdre, dodecaèdre, isocaèdre). On remarque que le graphe de tels polyèdres est un graphe planaire tel que chacun des n sommets soit de même degré d et que chacune des f faces soit adjacente à k arêtes. En notant de plus m le nombre d'arêtes, établir l'équation suivante

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$$

et montrer que seulement 5 valeurs sont possibles pour (d, k, n, m, f). Conclure.

Exercice 6.2. Soit G un graphe planaire tel que tout sommet soit de degré pair. Montrer que la carte induite par les faces d'un dessin de G dans le plan est 2-coloriable. (Indice : on pourra faire une récurrence sur le nombre d'arêtes de G).

Exercice 6.3. Montrer qu'un graphe G a au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes (où $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de G).

Correction.

Exercice 6.1. On utilise toutes les relations qu'on connaît entre les divers paramètres :

1. $2|E| = \sum d_i$ donc $2m = nd$.
2. Toutes les faces sont adjacentes à k arêtes, donc $2m = fk$.
3. Enfin, d'après la formule d'Euler, $n - m + f = 2$

On utilise (1) et (2) pour remplacer n et f dans 3 :

$$\frac{2m}{d} - m + \frac{2m}{k} = 2$$

ce qui donne en divisant par $2m$:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} .$$

Pour les polyèdres réguliers convexes, on sait que $k > 2$ et $d > 2$, sinon on obtient des cas dégénérés. Comme m est un entier on doit donc nécessairement avoir $\min(d, k) = 3$. En effet, dans le cas contraire, le membre de gauche serait majoré par $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ alors que le membre de droite est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. On en déduit pour $d = 3$ que $k \in \{3, 4, 5\}$ avec respectivement $m \in \{6, 12, 30\}$. En effet, si $k \geq 6$, le membre de gauche serait majoré par $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ alors que le membre de droite est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. Et de même pour $k = 3$ on doit avoir $d \in \{3, 4, 5\}$ avec les mêmes m. On ne peut donc avoir plus de 5 polyèdres réguliers convexes. On peut identifier les 5 polyèdre de Platon :

1. Tétraèdre : $(d, k, m) = (3, 3, 6)$.
2. Cube : $(d, k, m) = (3, 4, 12)$.
3. Dodécaèdre : $(d, k, m) = (3, 5, 30)$.
4. Octaèdre : $(d, k, m) = (4, 3, 12)$.
5. Isocaèdre : $(d, k, m) = (5, 3, 3)$.

Exercice 6.2. On raisonne par récurrence sur le nombre m d'arêtes du graphe. Pour $m = 0$, il y a qu'une face infinie et la carte induite est trivialement 2-coloriable (elle est même 1-coloriable). Supposons maintenant que l'affirmation soit vraie pour tout $i < m$ et prenons un représentation planaire d'un graphe avec m arêtes dont tous les degrés sont pairs. On choisit une face f de ce graphe et on enlève toutes les arêtes de son bord pour obtenir un graphe G'.

On peut remarquer que la face f de G est strictement incluse dans une face f' de G' ; f' est la réunion de f est des faces contigües de f. De plus, tous les degrés de G' sont encore pairs, car on a juste diminué le degré de certains sommets de 2. Par hypothèse de récurrence la carte qu'il induit est 2-coloriable. On colorie alors la face f de la couleur opposée à celle de f', les faces contigües restant de la même couleur. Ce nouveau coloriage est bien un 2 coloriage. Il est par ailleurs admissible. En effet, deux faces distinctes de f' contigües dans G restent contigües dans G', donc leur coloriage est distincts. Par construction, une face extérieure et contigüe à f' n'est jamais contigüe à la face f, le coloriage reste compatible le long de la frontière de f'. Il reste à étudier la compatibilité des couleurs à l'intérieur de f'. Par construction, la couleur de f est compatible avec celle de ces voisines. De plus, si deux faces incluses dans f' et distinctes de f sont adjacentes, alors il existe un chemin dans G reliant un sommet v du bord de f à un autre sommet du bord de f', mais dans ce cas, le sommet v possède un degré impair ce qui est impossible.

Exercice 6.3. On peut observer que si c est un coloriage du graphe G avec $\chi(G)$ couleurs, alors pour chaque couple de couleurs utilisées c_1 et c_2, il existe une arête reliant un sommet de couleur c_1 à un sommet de couleur c_2. En effet, si tel n'était pas le cas, en prenant une seule et même couleur à la place de c_1 et c_2, on obtiendrait encore un coloriage avec $\chi(G) - 1$ couleurs, ce qui est absurde. Ainsi le graphe contient au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes.