Révisions

Exercice 8.1. Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V (ainsi, tout vecteur $x \in V$ est une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{B}$). On suppose que V possède une seconde base $\mathcal{B}' = \{f_j\}_{j\in J}$. On se propose de démontrer que $\mathcal{B}'$ est également dénombrable.

1. Montrer que J est infini.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un ensemble fini $J_n \subseteq J$ tel que e_n appartienne au sous-espace engendré $\langle f_j;\ j \in J_n\rangle$.
3. Montrer que $J = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} J_n$.
4. Conclure.

Exercice 8.2. Donner une DNF, une CNF et une forme polynomiale de $\phi(x, y, z) = \text{NAND}(\text{NAND}(x, y), z)$. Montrer que le connecteur NAND et la constante 1 permettent d'exprimer toute fonction booléenne. Dessiner un diagramme calculant OR à l'aide de NAND et de 1 uniquement.

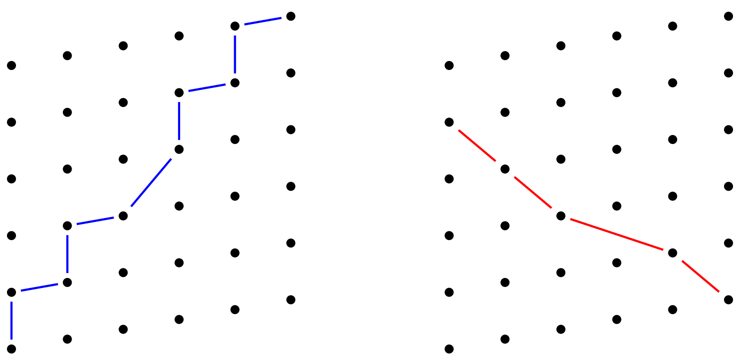
Exercice 8.3. On dit qu'une relation d'équivalence $\sim$ définie sur $\mathbb{Z}$ est une congruence si elle vérifie que pour tous $a, x, y \in \mathbb{Z}$, si $x \sim y$ alors $a + x \sim a + y$.
Montrez que $\sim$ est forcément l'égalité ou bien il existe un entier q tel que $\sim$ est la relation de congruence modulo˜q.

Exercice 8.4. Soit $x \geq 1$. Simplifier la somme suivante

$$S(x) = \sum_{1\leq n\leq x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$$

où $\mu(n)$ représente la fonction de Möbius (Indication : exprimer $\lfloor\cdot\rfloor$ comme une somme de 1).

Exercice 8.5. Soient n points du plan $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ tels que tous les x_i et tous les y_i soient distincts. Un *chemin polygonal de pente positive* sur les points est un chemin qui connecte certains points entre eux par des segments de pente positive. On définit de même un *chemin polygonal de pente négative*. Un exemple est donné sur la figure plus bas. Montrer que si $n = ab + 1$, alors il existe soit un chemin polygonal de pente positive et de longueur $a + 1$, soit un chemin polygonal de pente négative et de longueur $b + 1$.



(a) Pente positive (b) Pente négative

Exercice 8.6. Pour quelles valeurs de n peut-on trouver un graphe simple à n sommets dont les degrés sont deux à deux distincts ?

Exercice 8.7. Soit $n \geq 5$. On considère un dessin arbitraire du graphe complet K_n dans le plan. Montrer qu'il y a au moins $\frac{1}{5}\binom{n}{4}$ couples d'arêtes qui se croisent. (Indication : on utilisera le fait que K_5 n'est pas planaire)

Exercice 8.8. Montrer que le développement décimal du réel $(6+\sqrt{37})^{666}$ possède au moins 666 zéros consécutifs juste après la virgule.

Correction.

Exercice 8.1.

1. Si J est fini de cardinal m, alors l'espace engendré par $\mathcal{B}'$ est de dimension m, mais alors par inclusion, l'espace engendré par les vecteurs $(e_n)_{0\leq n\leq m}$, de dimension $m+1$, serait de dimension supérieure à m ce qui est impossible.
2. Comme $\mathcal{B}'$ est une base, il existe un ensemble fini J_n et des scalaires $(\lambda_j)_{j\in J_n}$ tels que
$$e_n = \sum_{j\in J_n} \lambda_j f_j.$$
Clairement, J_n convient.
3. Il est clair que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} J_n \subseteq J$. Soit $j_0 \in J$. Il existe un ensemble fini N et des scalaires $(\lambda_i)_{i\in N}$ tels que
$$f_{j_0} = \sum_{i\in N} \lambda_i e_i.$$
Ceci prouve que f_{j_0} appartient à $\langle f_j;\ j \in \bigcup_{n\in N} J_n\rangle$. Supposons que j_0 n'appartienne pas à N. Comme $\mathcal{B}'$ est une base, $N \cup \{j_0\}$ est libre, ce qui contredit l'égalité précédente. Donc $j_0 \in N \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} J_n$. Ainsi $J = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} J_n$.
4. Ainsi J est la réunion dénombrable d'ensembles finis. Donc J est encore dénombrable.

Exercice 8.2. On a $\neg(\neg(x \wedge y) \wedge z) = (x \wedge y) \vee \neg z$ qui est déjà une DNF. D'autre part $(x \wedge y) \vee \neg z = (x \vee \neg z) \wedge (y \vee \neg z)$ qui est une CNF. Pour la forme polynomiale, $\phi(x, y, z) = (xy + 1)z + 1 = xyz + z + 1$.

On obtient la négation par NAND(x, x), le AND par $\neg$NAND(x, y), le OR par
$$\text{OR} = \text{NAND}(\text{NAND}(\text{NAND}(x, y), y), \text{NAND}(y, y))$$

Exercice 8.3. On considère la classe d'équivalence C de 0 modulo $\sim$. On observe qu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. En effet, 0 en fait partie ; si $0 \sim x$, alors $0 - x \sim x - x = 0$ et par symétrie $0 \sim -x$. Enfin, si $0 \sim x$ et $0 \sim y$, alors $0 + x \sim y + x$ et par transitivité $0 \sim x + y$. Mais alors, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $C = t\mathbb{Z}$. Par ailleurs, en général, $x \sim y$ équivaut à $0 \sim y - x$, c'est-à-dire $y - x \in t\mathbb{Z}$. Quand t est non nul, on conclut que $\sim$ est la congruence modulo t, sinon il s'agit de l'égalité.

Exercice 8.4. On peut décomposer $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{d\leq \frac{x}{n}} 1 = \sum_{nd\leq x} 1$. On en déduit
$$S(x) = \sum_{n\leq x} \sum_{nd\leq x} \mu(n) = \sum_{m\leq x} \sum_{n|m} \mu(n)$$
Mais on sait que $\sum_{n|m} \mu(n) = 0$ si $m \neq 1$ et $\sum_{n|m} \mu(n) = 1$ quand $m = 1$. Il s'ensuit que
$$S(x) = 1.$$

Exercice 8.5. Définissons un ordre partiel sur $\mathbb{R}^2$ par $(x, y) \leq (x', y')$ si $x \leq x'$ et $y \leq y'$. Soit $\mathcal{P}$ le poset $(X, \leq)$, où $X = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$. Alors les chemins polygonaux de pente négative correspondent à des antichaînes dans X, tandis que les chemins polygonaux de pente positive correspondent à des chaînes. (x, y) et (x', y') sont incomparables ssi ils ne sont pas égaux et ou bien $x \leq x'$ et $y \geq y'$ ou $x \geq x'$ et $y \leq y'$; dans chacun des cas, la pente $(y - y')/(x - x')$ est négative. Réciproquement, ce nombre est négatif ssi (x, y) et (x', y') sont incomparables. Soit w la largeur de $\mathcal{P}$. Supposons que toutes les chaînes de $\mathcal{P}$ aient une longueur $\leq a$. Comme il existe une décomposition de $\mathcal{P}$ avec w chaînes disjointes, nous obtenons que $wa \geq ab + 1$, donc $w \geq b + 1$.

Exercice 8.6. Le graphe à un sommet sans arête convient. On suppose $n \geq 2$. Dans un graphe simple, le degré est majoré par $n - 1$, ce qui impose qu'il y ait exactement un sommet de degré 0, un sommet de degré 1, etc. et un sommet de degré $n - 1$. Mais alors ce dernier sommet est relié à tous les autres, alors que le premier n'est relié à personne.

Exercice 8.7. Il y a $\binom{n}{5}$ façons de réaliser K_5 dans K_n, ce qui fournit autant de couples d'arêtes qui se croisent. Cependant, un couple d'arêtes (soit 4 sommets distincts) peut appartenir à $n - 4$ sous-graphes différents. On obtient la borne $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5} = \frac{1}{5}\binom{n}{4}$

Exercice 8.8. On pose $x_n = (6 + \sqrt{37})^n - (6 - \sqrt{37})^n$. On observe que la suite (x_n) vérifie la relation de récurrence $x_{n+2} = 12x_{n+1} + x_n$, avec les conditions initiales $x_0 = 2$, $x_1 = 12$. Ainsi x_n est entier. De plus $0 \leq \sqrt{37} - 6 < 10^{-1}$, donc $0 \leq (6 + \sqrt{37})^n - x_n < 10^{-n}$. On conclut en prenant $n = 666$.