ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 2 04.10.2010

1. *Induction*

a) Prouver par induction que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \geq -1$, on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

b) Prouver par induction que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

2. *La notation O*

a) Montrer que $n^2 + 100 = O(n^2)$, c'est à dire trouver des éléments c et n_0 satisfaisant la définition. Montrer maintenant que $n^2 + 100 = \theta(n^2)$.

b) Supposons que $f(n) = O(g(n))$ et $g(n) = O(h(n))$. Montrer que $f(n) = O(h(n))$.

c) Montrer que $n = \Omega(\log_2(n))$.

d) Supposons que $f(n) = O(g(n))$. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ on a $a \cdot f(n) = O(b \cdot g(n))$

e) Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$, on a $n^d = O(a^n)$. (Indice: prendre le logarithme des deux fonctions).

f) Remplir le tableau suivant par vrai ou faux.

$f(n)$	$g(n)$	$f(n) = O(g(n))$	$f(n) = \Omega(g(n))$	$f(n) = \theta(g(n))$	$f(n) = o(g(n))$
$n^{1/100}$	$\sqrt{n}$				
$\ln(n)$	$\ln^2(n)$				
$\sqrt{n}$	$\ln^2(n)$				
2^n	$n!$				
$\log_2(n)$	$\log_3(n)$				
$\ln(n)$	$\ln\ln(n)$				
$2^{\ln(n)}$	n^2				
2^n	$n^{\ln\ln(n)}$				
$2^{\sqrt{\ln(n)}}$	$\sqrt{n}$				

3. L'Algorithme de Karatsuba

a) Soient $f(x) = a + b \cdot x$ et $g(x) = \alpha + \beta \cdot x$ deux polynômes de degré 1 sur $\mathbb{R}$. Utiliser l'algorithme de Karatsuba (p. 33 dans le cours) pour multiplier $f(x)$ et $g(x)$. De combien de multiplications d'éléments de $\mathbb{R}$ a-t-on besoin?

b) Soient $f(x) = 1+2x+x^2+2x^3$ et $g(x) = 2+2x+x^2+x^3$ deux polynômes de degré 3 sur $\mathbb{R}$. En utilisant l'algorithme naïf pour multiplier $f(x)$ et $g(x)$, de combien de multiplications d'éléments de $\mathbb{R}$ a-t-on besoin?

c) Considérons maintenant l'algorithme de Karatsuba pour $f(x)$ et $g(x)$ dans la question précédente. Que valent f_0, f_1, g_0, g_1? Que valent u et v?

d) Utiliser l'algorithme de Karatsuba pour effectuer la multiplication, et compter le nombre de multiplications sur $\mathbb{R}$ qui sont nécessaires.

4. Elever une matrice au carré

Soit A la matrice 2×2 sur $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) Trouver un algorithme qui calcule A^2 en utilisant 5 multiplications d'éléments de $\mathbb{R}$ (et autant d'additions d'éléments de $\mathbb{R}$ que nécessaire).

b) * Peut-on généraliser cet algorithme récursivement à toute matrice $n \times n$ pour obtenir un algorithme $O(n^{\log_2(5)})$ (comme nous l'avons fait dans le cours pour l'algorithme de Strassen)? Pourquoi?