ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 5 25 Octobre 2010

1. Algorithmes récursifs: Le diamètre d'un arbre binaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour deux sommets $a, b \in V$, on définit la *distance* $d(a, b)$ comme étant la longueur du plus court chemin de a à b. Le *diamètre* de G est défini comme étant la distance maximale dans le graphe, i.e.

$$\mathrm{diam}(G) := \max_{a,b \in V} d(a, b).$$

a) Soit T un arbre binaire, et soient T_1 et T_2 ses sous-arbres gauche et droit. Exprimer le diamètre puis la hauteur de T en fonction des diamètres et hauteurs de T_1 et T_2.

b) Construire un algorithme qui calcule le diamètre d'un *arbre binaire* en temps linéaire (en le nombre de sommets).

(Indice: Il faut construire par récurrence un algorithme qui, étant donné un arbre binaire, retourne sa hauteur et son diamètre en temps linéaire).

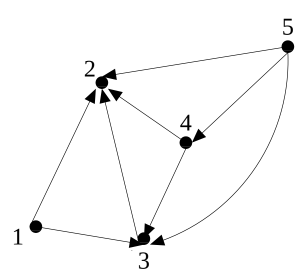
2. Algorithmes par induction: Le problème de la célébrité

Nous aimerions trouver une célébrité dans un ensemble V de n personnes. Pour modéliser ce problème, nous caractérisons une célébrité comme suit: C'est une personne qui est connue de tout le monde, mais qui ne connait personne.

Pour résoudre ce problème, nous avons le droit de poser un seul type de question: si $a, b \in V$ sont des personnes, nous pouvons demander à a s'il connait b, et il nous répondrera par "oui" ou "non". Le problème est donc le suivant: Etant donné un groupe de personnes V contenant une célébrité, trouver la célébrité en posant de telles questions.

Remarquons qu'on peut modéliser ce problème comme un problème de graphe orienté (V, E): L'ensemble V est l'ensemble des personnes, et on met une flèche de $a \in V$ à $b \in V$ si et seulement si a connait b. Poser la question "a connait-il b?" revient alors à vérifier si l'élément (a, b) de la matrice d'adjacence vaut 1.

a) Dans le graphe suivant y-a-t il une célébrité?



b) Supposons que nous avons un ensemble de personnes V dont certaines se connaissent (on obtient donc un graphe orienté (V, E)). Montrer qu'il peut y a voir au plus une célébrité dans V.

c) Supposons que le sommet i est une célébrité. Que peut-on dire sur la ligne i et la colonne i de la matrice d'adjacence du graphe?

d) Décrire l'algorithme naïf pour résoudre le problème de la célébrité, étant donné la matrice d'adjacence du graphe. Donner l'ordre du nombre de questions qu'il faut poser (c'est-à-dire le nombre d'entrées dans la matrice qu'il faut regarder) en fonction du nombre de personnes $n = |V|$.

e) Observons que pour tout $a, b \in V$, on a

- Si a connaît b, alors a ne peut pas être une célébrité.
- Si a ne connaît pas b, alors b ne peut pas être une célébrité.

Nous voulons utiliser ce fait pour construire par induction un algorithme $O(n)$ pour résoudre le problème de la célébrité.

Pour simplifier, nous supposons qu'il y a en effet une célébrité dans G, et qu'il s'agit donc juste de la trouver.

- *(i)* Base. Montrer que pour $n = 2$ on peut résoudre ce problème en posant une seule question.
- *(ii)* Pas. Supposons que nous savons résoudre le problème pour n personnes en posant $T(n)$ questions. Montrer qu'on peut le résoudre pour $n+1$ personnes en posant $T(n)+1$ questions.
- *(iii)* En déduire un algorithme pour résoudre le problème pour n personnes, et donner le nombre de questions qui sont nécessaires.

3. *Multiplication de plusieurs matrices*

Supposons que nous avons 4 matrices aux formats suivants:

Matrice	Format
A_1	5×10
A_2	10×3
A_3	3×12
A_4	12×5

Calculer la disposition de parenthèses de l'expression $A_1 \cdots A_4$ qui minimise le nombre de multiplications nécessaires.