

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

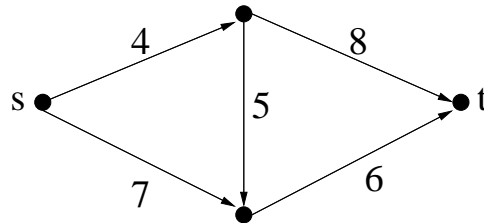
Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 10

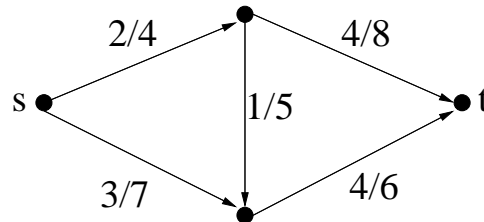
6 décembre 2010

1. Flux

On considère le réseau suivant:



a) L'application suivante est-elle un flux?



- b) Trouver un flux maximal pour ce réseau. Quelle est sa valeur?
- c) Supposons qu'il s'agit d'un réseau de tuyaux de distribution d'eau, et qu'il faut enlever un des tuyaux. Lequel faudrait-il enlever pour diminuer aussi peu que possible le flux maximal?
- d) Supposons qu'on peut remplacer l'un des tuyaux par un tuyau de capacité 10. Lequel faudrait-il remplacer pour augmenter autant que possible le flux maximal?

2. Augmenter les poids

Soit $G = (V, E)$ un graphe et T un arbre couvrant minimal de G .

- a) Si on augmente le poids de chaque arête de G par une constante c , est-ce que l'arbre T reste minimal? Justifiez votre réponse.
- b) Si on diminue le poids de l'une des arêtes de T , T est-il encore un arbre couvrant minimal de G ? Justifiez votre réponse.

3. Deuxième meilleur arbre couvrant

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe non-orienté avec une fonction de poids $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que tous les poids des arêtes sont distincts.

Soit \mathcal{T} l'ensemble de tous les arbres couvrants de G et soit T' un arbre couvrant minimal de G . On dit qu'un arbre couvrant T est *deuxième meilleur* si $w(T) = \min_{T'' \in \mathcal{T} \setminus \{T'\}} \{w(T'')\}$.

- a) Montrer que l'arbre couvrant minimal est unique, mais que le deuxième meilleur arbre ne l'est pas en général.
- b) Soit T l'arbre couvrant minimal de G . Démontrer qu'il existe des arêtes $(u, v) \in T$ et $(x, y) \in E \setminus T$ telles que $(T \setminus \{(u, v)\}) \cup \{(x, y)\}$ est un deuxième meilleur arbre couvrant de G .

4. Attribution optimale

Soient 15 étudiants, dont 6 des informaticiens que nous appelons I_1, \dots, I_6 et 9 des physiciens P_1, \dots, P_9 . La résidence d'étudiants doit leur attribuer des chambres C_1, \dots, C_6 dont C_1 et C_2 sont des chambres doubles et C_3, \dots, C_6 sont des chambres simples. Chaque étudiant a une liste de chambres acceptables pour lui:

Étudiant	Chambres acceptables
P_1	C_1, C_3
P_2	C_1, C_2, C_3, C_4, C_5
P_3	C_4, C_5
P_4	C_2
P_5	C_3, C_6
P_6	C_1, C_2
P_7	C_3, C_4, C_5, C_6
P_8	C_5, C_6
P_9	C_3, C_5
I_1	C_2, C_3, C_4
I_2	C_1, C_6
I_3	C_2, C_5
I_4	C_3, C_4, C_6
I_5	C_1
I_6	C_2, C_5

Le problème est d'attribuer le nombre maximal d'étudiants aux chambres tel que

- On n'attribue pas de chambre inacceptable à un étudiant.
 - Une chambre double aura au plus deux étudiants, une chambre simple au plus un.
 - Si deux étudiants sont attribués la même chambre, alors ils n'étudient pas le même sujet.
- a) Quel algorithme de graphe du cours utiliserez-vous pour résoudre ce problème?
- b) Dessinez le graphe correspondant à ce problème.