laboratoire d'algorithmique
laboratoire de mathématiques algorithmiques

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 11 13 December 2010

1. La taille de l'input

Pour chacun des problèmes suivants, donner la taille de l'input en fonction de n :

a) Etant donné un nombre $n \in \mathbb{N}$, trouver sa décomposition en produit de nombres premiers.

b) Etant donné une matrice binaire $n \times n$, calculer l'inverse de cette matrice, s'il existe.

c) Etant donné n entiers non-négatifs plus petits que 1000, trouver le plus grand.

d) Etant donné un graphe G avec des poids entre -100 et 100 (donné par sa matrice d'adjacence) trouver un arbre couvrant minimal.

2. Réduction polynomiale

Rappelons d'abord qu'une *clique* dans un graphe $G(V, E)$ est un sous-ensemble $S \subseteq V$ tel que $S \times S \subseteq E$, c'est à dire un ensemble de sommets qui sont tous connectés entre eux.

Considérons les problèmes de décision suivants :

Problème : CLIQUE
Input : Un graphe non orienté G, et un entier k.
Output : Vrai si G contient une clique de taille $\geq k$, Faux sinon.

Problème : HALF-CLIQUE
Input : Un graphe non orienté G, ayant n sommets (où n est pair).
Output : Vrai si G contient une clique de taille $\geq n/2$, Faux sinon.

Nous voulons montrer que

$$\text{CLIQUE} \leq_P \text{HALF-CLIQUE}.$$

Ainsi, il s'agit donc de construire une fonction f qui transforme un input (G, k) de CLIQUE en un input G' de HALF-CLIQUE.

a) Soit G un graphe, et soit $f_1(G)$ le graphe obtenu en ajoutant à G un sommet connecté à tous les autres sommets. Montrer que G contient une clique de taille $\geq k$ si et seulement si $f_1(G)$ contient une clique de taille $\geq k+1$.

b) Généraliser la construction ci-dessus. Plus précisément, pour tout $a \in \mathbb{N}$, montrer qu'étant donné un graphe G, on peut construire un graphe $f_a(G)$ tel que G contient une clique de taille $\geq k$ si et seulement si $f_a(G)$ contient une clique de taille $\geq k+a$.

c) Soit m le nombre de sommets dans G. Supposons que $k \leq m/2$. Trouver a en fonction de m et k tel que G contient une clique de taille $\geq k$ si et seulement si $f_a(G)$ contient une clique de taille $\geq n_a/2$, où n_a dénote le nombre de sommets dans $f_a(G)$.

d) Déduire que CLIQUE $\leq_P$ HALF-CLIQUE. (*Indice :* Distinguer les deux cas $k \leq m/2$ et $k > m/2$).

3. L'algorithme de Karp

On considère l'algorithme de Karp sur un graphe $G = (V, E)$ avec poids $w : E \to \mathbb{R}$.

Les points a) et b) ci-dessous sont l'exercice qui se trouve au milieu de la page 196 du polycopié.

a) Montrer que l'égalité suivante est vraie :

$$F_k(x) = \min_{u \in V \wedge (u,x) \in E} \{F_{k-1}(u) + w(u, x)\},$$

ou $F_k(\cdot)$ est (par définition) le poids du plus léger chemin de s à x de longueur k. (Voir le cours pour les notations en détail.)

b) Montrer que les valeurs de $F_k, F_{k-1}, \cdots, F_0$ peuvent Ãªtre calculées en $O(|E| \cdot (k + 1))$ opérations.

c) Ecrire explicitement (en pseudo-code) l'algorithme de Karp.