ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 12 20 Décembre 2010

1.Langages

Un *langage* est un sous-ensemble de $\{0,1\}^*$, i.e. c'est un sous-ensemble de tous les vecteurs de bits. Par exemple, le langage

$$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x| \geq 1 \wedge x_{|x|} = 1\}. \tag{1}$$

est le langage de tous les mots de bits qui se terminent avec un 1. ($|x|$ dénote la longueur en bits de x).

a) En fait on peut codifier n'importe quel input d'un algorithme sous la forme d'un mot de bits. Résoudre le cas suivant: Donner une méthode pour codifier deux entiers de longueurs (binaires) n et m en un mot binaire, sans utiliser plus que $n + m + O(\log(n))$ bits.

b) A chaque problème de décision correspond un langage: c'est l'ensemble de tous les mots pour lesquels la réponse au problème de décision est TRUE. Inversement, à chaque langage L donné correspond le problème de décision suivant: "Est-ce que $x \in L$?"

   A quel problème de décision correspond (1), si l'on interprète le mot comme un nombre binaire?

2. SAT

On rappelle qu'une formule CNF (*Conjunctive normal form*) sur les variables $x_1, \ldots, x_n$ s'écrit

$$F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m,$$

où chaque clause C_j est de la forme $\lambda_1 \vee \ldots \vee \lambda_{k_j}$ (et on a pour chaque i: $\lambda_i = x_i$ ou $\overline{x_i}$). Les λ_i sont appelés des *littéraux*. Une *attribution* aux variables $x_1, \ldots, x_n$ consiste à donner la valeur TRUE ou FALSE à chacune des variables x_i.

Pour une attribution donnée, la formule F sera donc soit vraie (l'attribution est alors dite *satisfaisante*), soit fausse. Une formule F est dite *satisfaisable* s'il existe une attribution aux variables $x_1, \ldots, x_n$ telle que F est vraie.

a) Considérons la formule suivante sur les variables x_1, x_2, x_3:

$$F_1 = (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_1}) \wedge (\overline{x_3} \vee \overline{x_1})$$

   L'attribution $x_1 =$ TRUE, $x_2 =$ FALSE, $x_3 =$ TRUE est elle satisfaisante?

b) Trouver une attribution satisfaisante pour F_1.

c) La formule suivante, sur les variables x_1 et x_2 est elle satisfaisable?

$$F_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$$

d) On considère le problème suivant: étant donné une formule CNF F sur n variables, avec m clauses contenant $k_1, \dots, k_m$ littéraux, determiner si cette formule est satisfaisable (C'est le problème SAT). Quelle est la taille de l'input pour ce problème?

e) Montrer que ce problème est dans NP.

f) Montrer que si P=NP, alors il existe un algorithme polynomial qui, étant donné une formule CNF F, retourne une attribution satisfaisante aux variables $x_1, \dots, x_n$, si une telle attribution existe (donc il ne retourne pas juste TRUE ou FALSE, mais il retourne l'attribution elle même si elle existe).

3. Révision: Knapsack 0/1

Supposons que nous avons l'instance suivante du problème 0/1-Knapsack: Nous voulons maximiser la valeur totale en choisissant un sous-ensemble des objets $\{A_1, \dots, A_7\}$, avec un poids total maximal de $W = 20$.

Objet	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
Valeur	3	7	12	11	14	6	x
Poids	2	4	6	8	11	4	y

Rappelons que l'algorithme vu en cours consiste à calculer la matrice C, de taille $(n+1) \times (W+1)$ (donc 8×21 ici). Les 6 premières lignes de C sont les suivantes:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 3 & 3 & 7 & 7 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\
0 & 0 & 3 & 3 & 7 & 7 & 12 & 12 & 15 & 15 & 19 & 19 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 & 22 \\
0 & 0 & 3 & 3 & 7 & 7 & 12 & 12 & 15 & 15 & 19 & 19 & 22 & 22 & 23 & 23 & 26 & 26 & 30 & 30 & 33 \\
0 & 0 & 3 & 3 & 7 & 7 & 12 & 12 & 15 & 15 & 19 & 19 & 22 & 22 & 23 & 23 & 26 & 26 & 30 & 30 & 33 \\
? & ? \\
? & ?
\end{pmatrix}.$$

Donc les lignes correspondant à A_6 et A_7 n'ont pas encore été calculées.

a) Si $x = 6$ et $y = 3$, quelle est la solution du problème? Donner la plus grande valeur atteignable, et un sous-ensemble des objets qui atteint cette valeur (sans dépasser le poids maximal).

b) Si $y = 7$, exprimer la valeur optimale en fonction de x.

c) Si $x = 11$, donner une valeur de y pour laquelle il y a 2 solutions optimales (donc 2 sous-ensembles différents qui donnent la plus grande valeur totale).