Exercice 2.1. Trouver toutes les relations sur $\{a, b\} \times \{c, d\}$ qui ne sont pas des fonctions. Trouver toutes les relations sur $\{a, b\} \times \{c, d\}$ qui ne sont pas des applications.

Exercice 2.2. Soient $\mathcal{E}$ un ensemble et f une bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. On définit sur $\mathcal{E}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathcal{E}^2, \qquad x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow\ \exists n \in \mathbb{Z}, y = f^n(x).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que si C est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$, alors $f(C) = C$.
3. Montrer que si X est une partie non-vide de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(X) = X$, alors X est une réunion de classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$.

Exercice 2.3. Soit X un ensemble non-vide et $R \subseteq (P(X) \setminus \emptyset) \times (P(X) \setminus \emptyset)$ la relation définie par $(A, B) \in R$ lorsque $A \cap B \neq \emptyset$.

(a) R est-elle réflexive? c'est-à-dire, $(A, A) \in R$ pour $A \in P(X) \setminus \emptyset$?

(b) R est-elle symétrique? c'est-à-dire, $(A, B) \in R$ implique $(B, A) \in R$?

(c) R est-elle transitive? c'est-à-dire, $(A, B), (B, C) \in R$ implique $(A, C) \in R$?

Exercice 2.4. Soit R une relation transitive sur $\mathbb{Z}$ pour laquelle on sait que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si $|a - b| = 2$ alors $(a, b) \in R$. R est-elle nécessairement une relation d'équivalence? Même question si $|a - b| \in \{3, 4\}$ implique $(a, b) \in R$.

Exercice 2.5. Pour une relation R sur l'ensemble X, on définit la relation R^n par récurrence sur n avec $R^1 = R$ et $R^{n+1} = R \circ R^n$. Répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que si X est fini, il existe $s, r \in \mathbb{N}$ tels que $s < r$ et $R^s = R^r$.
2. Trouver une relation R sur un ensemble fini X tel que $R^{n+1} \neq R^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Trouver une relation R sur un ensemble infini X tel que toutes les relations R^n sont distinctes quand $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer qu'une relation R est transitive ssi $R^n \subseteq R$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2.6. Dans l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall f, g \in E, \qquad f\mathcal{R}g \quad \text{si} \quad \exists \varphi \in E \text{ bijective}, \ \varphi \circ f = g \circ \varphi.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. A-t-on que $\cos \mathcal{R} \sin$?
3. Former une condition nécéssaire et suffisante sur $(p, q) \in \mathbb{R}$ pour que les applications

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + px + q \end{cases}$$

soient équivalentes.