On rappelle que l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'énonce ainsi : pour tous vecteurs réels $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$, on a $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$.

Exercice 4.1. Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\overline{G} = (V, E^c)$ où le complémentaire de E est pris dans $V \times V$. Montrer que si un graphe n'est pas connexe alors son complémentaire est connexe.

Exercice 4.2. Soit G un graphe sur n sommets tel que chaque sommet soit de degré au moins $\lceil (n-1)/2 \rceil$. Montrer que G est connexe.

Exercice 4.3. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Exercice 4.4. Soit $d \geq 3$, montrer que la taille du plus petit cycle contenu dans un graphe d-régulier sur n sommets ne peut dépasser $c \log_{d-1}(n)$ pour une certaine constante c.

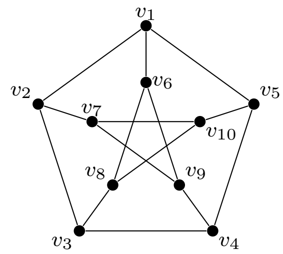
Exercice 4.5. Soit G un graphe avec n sommets et m arêtes tel que $m > n^2/4$. Montrer que G contient un triangle (un cycle de longueur 3). (Indication : montrer que si (u, v) est une arête, alors $\deg u + \deg v \leq n$ et sommer cette relation.)

Exercice 4.6. (Problème de Littlewood-Offord) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels avec $|a_i| > 1$ pour tout i. Soit

$$e(a_1, \ldots, a_n) := \# \left\{ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \mid -1 < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i < 1 \right\} .$$

Montrer que $e(a_1, \ldots, a_n) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Donner un exemple pour lequel il y a égalité.

Exercice 4.7. Montrer que le graphe de Petersen dessiné ci-dessous est isomorphe au graphe $G = (V, E)$ avec $V = \{A \subset \underline{5}, |A| = 2\}$ et $E = \{(A, B) \in V^2, A \cap B = \emptyset\}$.



Exercice 4.8. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe dans lequel tous les couples de sommets distincts ont soit zéro soit cinq voisins communs. Montrer que G est un graphe régulier, c'est-à-dire que tout les sommets de G sont de même degré. (Indice : choisir $(a, b) \in E$ et considérer l'ensemble A des voisins de a différents de b et l'ensemble B des voisins de b différents de a).

Exercice 4.9. Soit $G = (V, E)$ un graphe, le *graphe des arêtes* de G est le graphe $L(G) = (E, \{((a, b), (b, c)) \mid (a, b) \in E$ et $(b, c) \in E\}$.

1. Si la somme des degré de G est s, quel est le nombre de sommets de $L(G)$?
2. Supposons $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\deg(v_i) = d_i$, Exprimer la somme des degrés de $L(G)$.
3. Pour quels graphes connexes G est-il isomorphe à $L(G)$? Justifier sa réponse.

Exercice 4.10. Le Roi Uxamhwiashurh a quatre fils ; dix de ses descendants de sexe masculin ont trois fils chacun, quinze ont deux fils et tous les autres sont morts sans avoir eu d'enfant. Combien de descendants de sexe masculin le Roi Uxamhwiashurh a-t-il ?